





سلسلة الكتب الجامعية المترجمة - العلوم الأساسية

10

ريتشارد ل. بوردين
ج. دوغلاس فايرس

التحليل العددي

المملكة العربية السعودية
وزارة التعليم العالي
MINISTRY OF HIGHER EDUCATION

العبيكان
Obeikan

الباب

1

أسس رياضية وتحليل الخطأ

Mathematical Preliminaries and Error Analysis

مقدمة

درسنا (قانون الغاز المثالي) $PV = NRT$ الذي يربط بين الضغط P، والحجم V، والحرارة T وعدد المولات N في الغاز (المثالي) في مقررات الكيمياء الابتدائية. وفي هذه الصيغة، يعتمد ثابت R على نظام القياس.

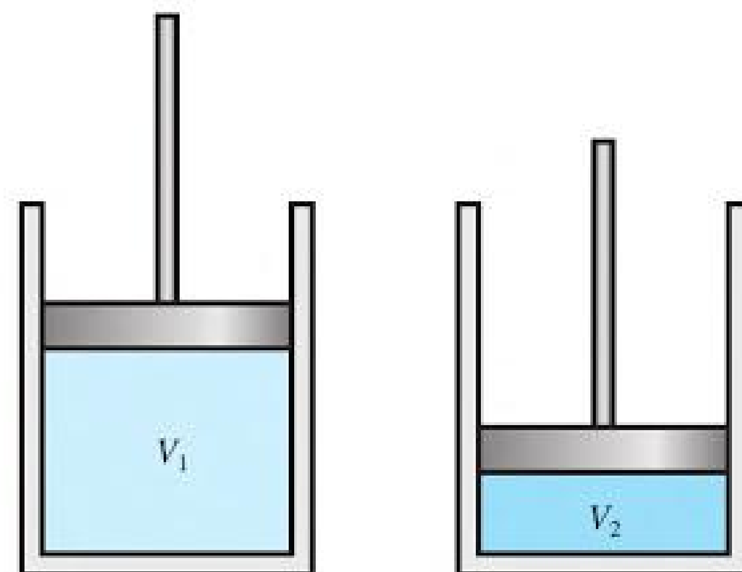
افترض أننا أجرينا تجربتين لاختبار هذا القانون باستخدام الغاز نفسه في كل حالة. لقد كان لديك في التجربة الأولى

$$P = 1.00 \text{ atm}, \qquad V = 0.100 \text{ m}^3$$
$$N = 0.00420 \text{ mol}, \qquad R = 0.08206$$

إن قانون الغاز المثالي يتوقع أن تكون درجة حرارة الغاز

$$T = \frac{PV}{NR} = \frac{(1.00)(0.100)}{(0.00420)(0.08206)} = 290.15 \text{ K} = 17^{\circ}\text{C}$$

وعندما قسنا درجة حرارة الغاز، وجدنا أن درجة حرارته الحقيقية تساوي 15^{o} C.



والآن نعيد التجربة باستخدام قيم N و R نفسها، ولكن بزيادة الضغط بمثلين ونقصان الحجم بمثلين أيضًا. وبما أن حاصل الضرب PV يبقى نفسه، فإن درجة الحرارة المتوقعة تبقى 17^{o} C، ولكننا نجد أن درجة الحرارة الآن هي 19^{o} C.

ومن الواضح أن قانون الغاز المثالي مشكوك فيه، ولكن قبل الاستنتاج بأن القانون خطأ، يتعين في هذه الحالة معاينة البيانات لنرى ما إذا كان الخطأ يعزى إلى نتائج التجربة. وإذا كان الأمر كذلك فربما تمكنّا من تحديد درجة الدقة المطلوبة في نتائج التجربة؛ لنضمن عدم وجود خطأ بهذا المقدار.

إن تحليل الخطأ الداخل في الحسابات موضوع مهم في التحليل العددي، وسيُدرس في الفصل (2.1).

وسيناقش هذا التطبيق السابق في التمرين (28) من الفصل (2.1).

ويحتوي هذا الباب على مراجعة قصيرة لمواضيع التفاضل والتكامل في متغير واحد، التي نحتاج إليها في الأبواب اللاحقة، بالإضافة إلى مقدمة عن التقارب، وتحليل الخطأ، والتمثيل الآلي للأعداد.

1.1 مراجعة التفاضل والتكامل Review of Calculus

تعدّ مفاهيم النهاية والاتصال للدالة مواضيع رئيسة عند دراسة التفاضل والتكامل.

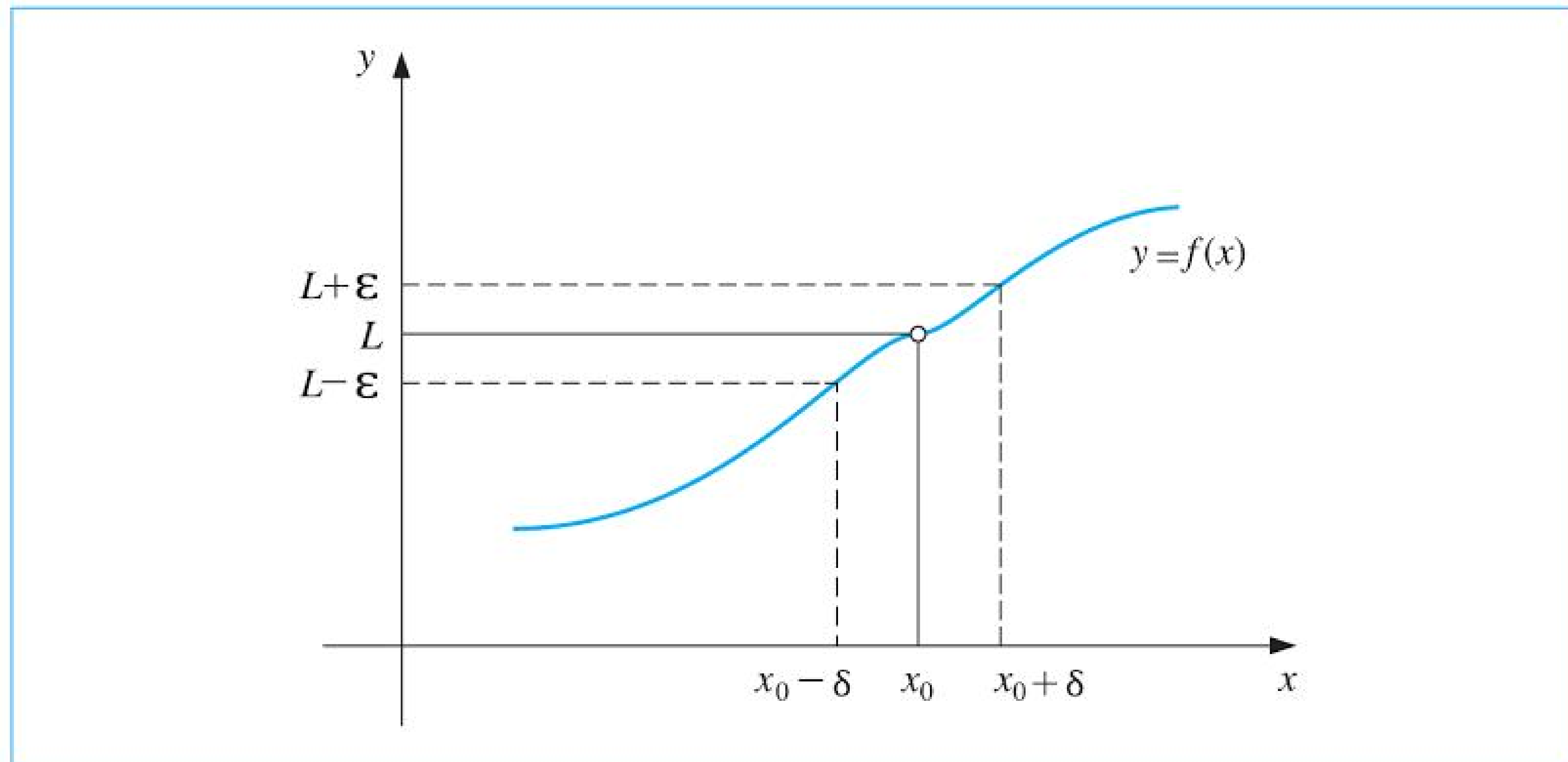
تعريف 1.1 يكون للدالة f المعرّفة على مجموعة الأعداد الحقيقية X نهاية قيمتها L عند النقطة x_0، وتُكتب

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = L$$

إذا كان لأي عدد حقيقي $\varepsilon > 0$، يوجد عدد حقيقي $\delta > 0$ بحيث يتحقق $|f(x) - L| < \varepsilon$ عندما $x \in X$ و $0 < |x - x_0| < \delta$.

(انظر شكل (1.1). ■

شكل 1.1



تعريف 2.1

لقد طُوِّرت مفاهيم التفاضل والتكامل وتطبيقاته في أواخر القرن السابع عشر وأوائل القرن الثامن عشر، ولكن الصيغ الرياضية الدقيقة لمفهوم النهاية والاتصال لم تتبلور حتى جاء هينرج أبروارد هيين (1821–1881) وكارل فيرستراس (1815–1897) في القرن التاسع عشر.

افترض أن f دالة معرّفة على مجموعة من الأعداد الحقيقية X و $x_0 \in X$، تكون الدّالة f متصلة عند x_0 إذا كانت

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

وتكون الدّالة f متصلة على المجموعة X إذا كانت متصلة عند كل نقطة (عدد) في X. ■

نستخدم الرمز $C(X)$ ليعبّر عن الدّوال المتصلة جميعها على x. وعندما تكون x فترة على خط الأعداد الحقيقية، نحذف الحاصرتين ( ).

نعبّر عن مجموعة جميع الدّوال المتصلة على الفترة المغلقة $[a,b]$ بالرمز $C[a,b]$.

وتعرّف نهاية متتالية الأعداد الحقيقية أو الأعداد المركبة بطريقة مماثلة.

تعريف 3.1

افترض أن $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ متتالية أعداد حقيقية أو مركبة.

يكون للمتتالية $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ نهاية x (تتقارب المتتالية إلى x إذا كان لكل $\varepsilon > 0$ يوجد عدد صحيح موجب $N(\varepsilon)$ بحيث $|x_n - x| < \varepsilon$ عندما $n > N(\varepsilon)$.

تعني الرموز الآتية

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x \quad \text{أو} \quad x_n \to x \text{ عندما } n \to \infty$$

أن المتتالية $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ تتقارب إلى x. ■

مبرهنة 4.1

إذا كانت f دالة معرّفة على مجموعة من الأعداد الحقيقية X، وكان $x_0 \in X$ فإن العبارات الآتية متكافئة

أ. f متصلة عند x_0.

ب. إذا كانت $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ أي متتالية على X ومتقاربة إلى x_0 فإن

$$\lim_{n \to \infty} f(x_n) = f(x_0)$$ ■

نفترض أن الدّوال جميعها والتي نستخدمها في الطرائق العددية متصلة؛ لأن هذا هو الحد الأدنى من المتطلبات للتنبؤ بسلوك الدّوال. وإن الدّوال غير المتصلة يمكنها القفز عن نقاط ذات أهمية مما يؤدي إلى صعوبات عند محاولة الحصول على تقريب لمسألة ما.

وإن الافتراضات الأكثر حبكة حول الدّالة تؤدي عمومًا إلى حلول تقريبية أفضل.

وإن الدّالة ذات الرسم الناعم يسهل التنبؤ بسلوكها بصورة أفضل من تلك الدّالة ذات الخشونة المتعددة، على سبيل المثال: إن شرط النعومة يعتمد على مفهوم المشتقة.

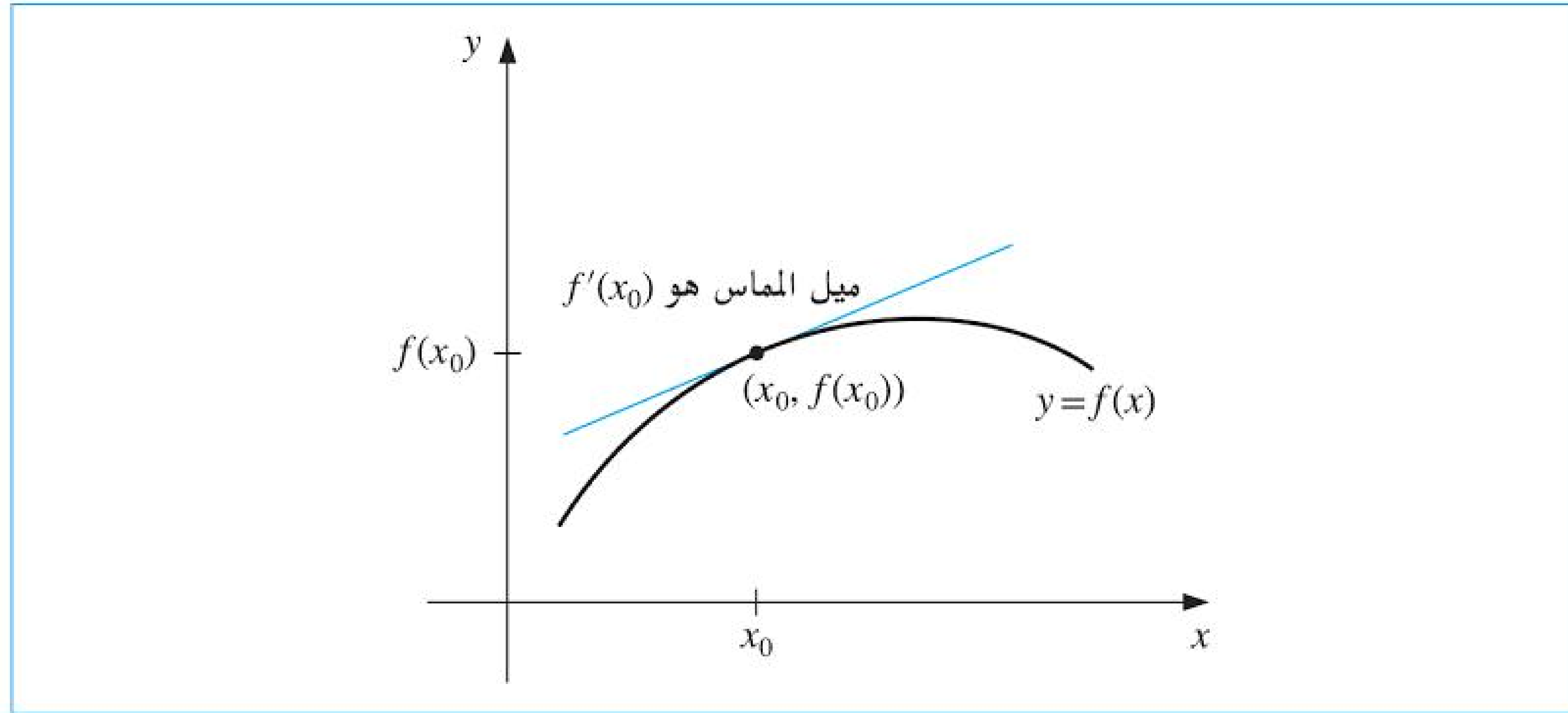
تعريف 5.1

افترض أن f دالة معرّفة على فترة مفتوحة تحتوي على x_0. نقول: إن الدّالة f قابلة للاشتقاق عند x_0 إذا كانت $f'(x_0) = \lim_{x\to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ موجودة، يسمى العدد $f'(x_0)$ مشتقة f عند x_0.

وتكون الدّالة f قابلة للاشتقاق على المجموعة x إذا كانت قابلة للاشتقاق عند كل نقطة في x. ■

إن مشتقة الدّالة f عند x_0 هي ميل خط المماس لمنحنى f عند النقطة $(x_0, f(x_0))$ كما في الشكل (2.1).

شكل 2.1



مبرهنة 6.1 إذا كانت الدّالة f قابلة للاشتقاق عند x_0 فإن f متصلة عند x_0. ■

تُعزى هــذه المبرهنة للرياضي مـايكل رول (1652–1719)، وقد ظهرت عام 1691 في مقالة بعنوان Me'thode pour re'sounder les e'galites انتقد رول علم التفاضل والتكامل الذي طوّره إسحاق نيوتن وغوتفريد لايبنتز في البداية، ولكن أصبح رول أخيرًا من مطوّري هذا العلم.

نعبّر عن مجموعة الدّوال جميعها والتي يوجد لها n من المشتقات المتصلة على المجموعة X بالرمز $C^n(X)$، وعن مجموعة الدّوال التي لها مشتقات من جميع الرتب على X بالرمز $C^\infty(X)$. إن كثيرات الحدود، والدّوال النسبية، والمثلثية، والأسّية واللوغارتمية تنتمي كلها إلى $C^\infty(X)$ حيث تتألف X من الأعداد جميعها والتي تعرّف عليها هذه الدّوال. وإننا نحذف الأقواس في هذه الرموز عندما تكون X فترة على خط الأعداد الحقيقية كالسابق.

النظريات الآتية ذات أهمية رئيسة في اشتقاق طرائق تقدير الخطأ. وإن براهين هذه النظريات والنتائج جميعها والتي لم تُذكر مراجعها في هذا الفصل، يمكن الرجوع إليها في أي كتاب تفاضل وتكامل رئيس.

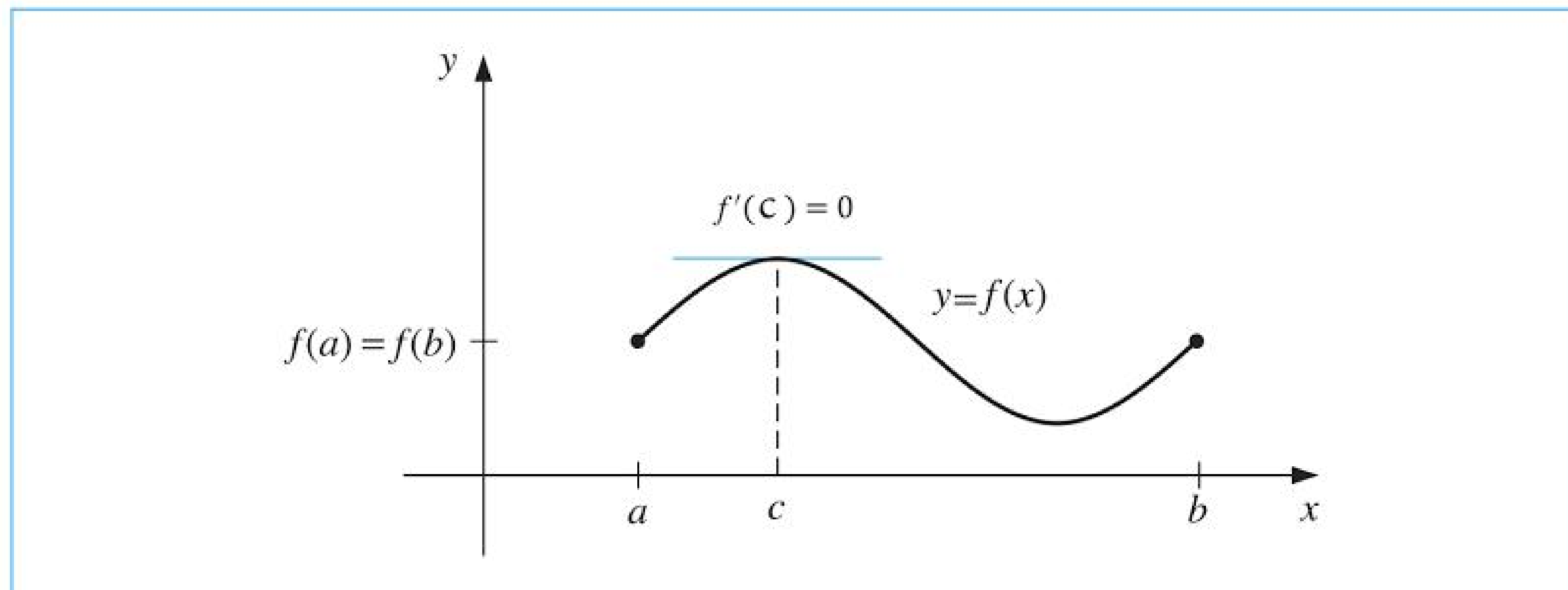
مبرهنة 7.1 مبرهنة رول **Rolle's Theorem**

إذا كانت $f \in C[a, b]$ قابلة للاشتقاق على (a,b)،

وإذا كانت $f(a) = f(b)$، فإنه يوجد عدد c في الفترة (a,b)، يحقق $f'(c) = 0$.

(انظر شكل 3.1). ■

شكل 3.1

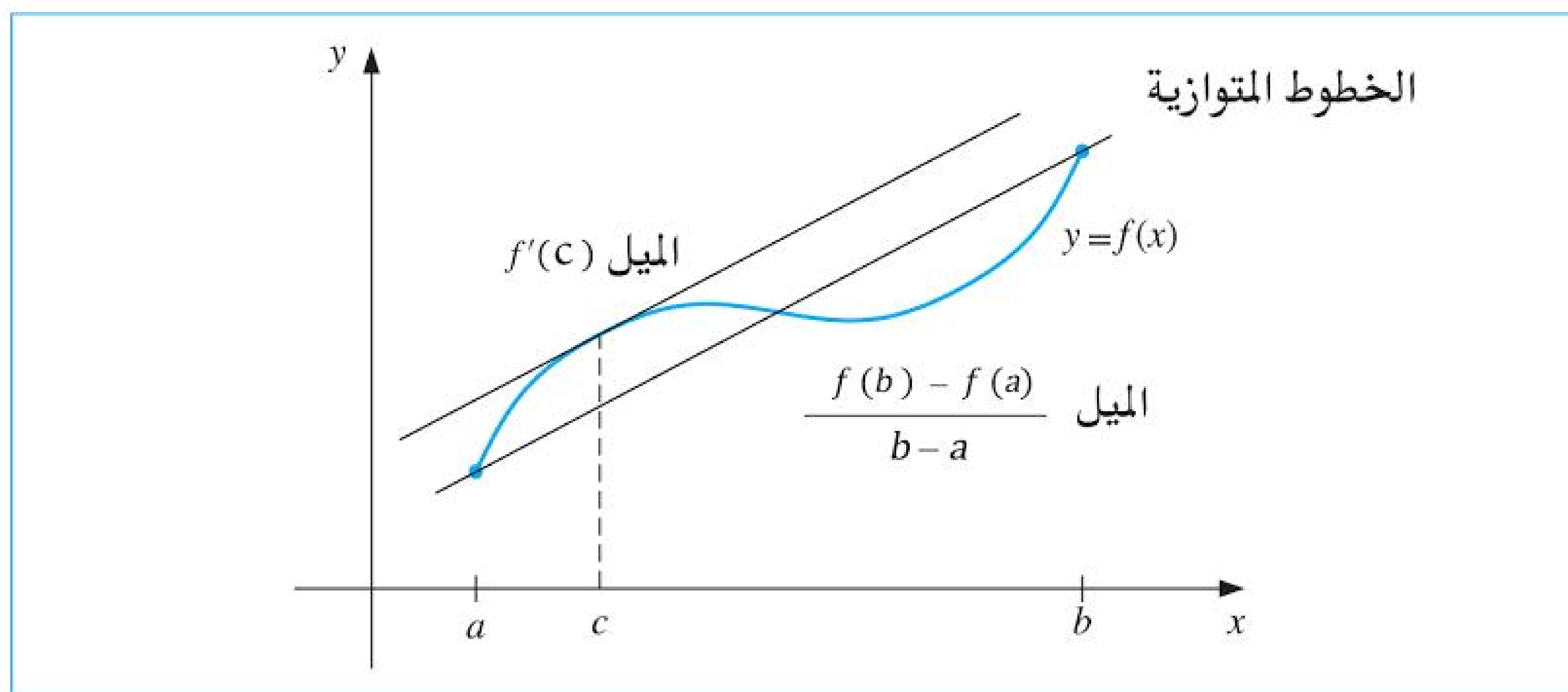


مبرهنة 8.1 مبرهنة القيمة الوسيطية Mean Value Theorem

إذا كانت $f \in C[a, b]$ وكانت f قابلة للاشتقاق على (a, b) فإنه يوجد عدد c في الفترة (a, b) يحقق $f'(c) = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$.

(انظر شكل 4.1). ■

شكل 4.1

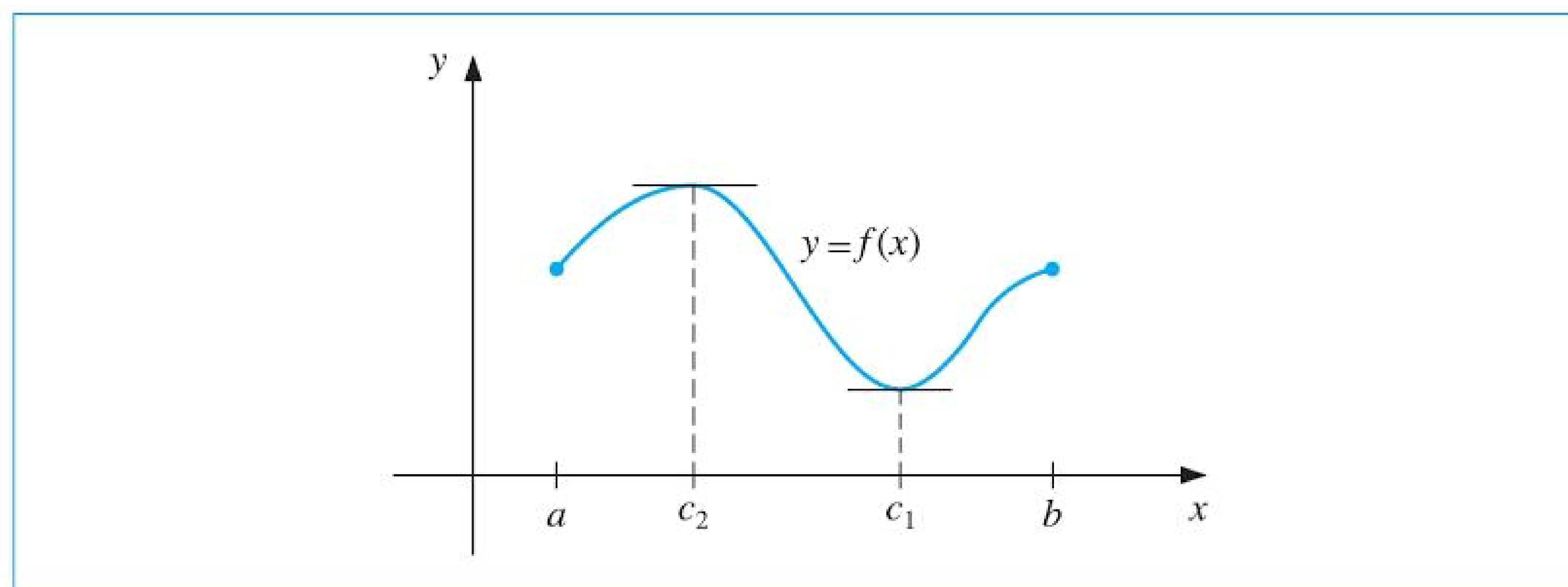


مبرهنة 9.1 مبرهنة القيمة القصوى Extreme Value Theorem

إذا كانت $f \in C[a, b]$ فإنه توجد نقطتان $c_1, c_2 \in [a, b]$ بحيث يكون $f(c_1) \leq f(x) \leq f(c_2)$ لجميع القيم $x \in [a, b]$. بالإضافة إلى ذلك، إذا كانت f قابلة للاشتقاق على (a, b) فإن النقطتين c_1 و c_2 تقعان على طرفي الفترة $[a, b]$ أو تكون f' مساوية للصفر.

(انظر شكل 5.1). ■

شكل 5.1



لقد بدأت البحوث حول تصميم الخوارزميات والأنظمة لاستخدام الرياضيات الرمزية مع بدايات 1960، وأول نظام فعّال ظهر كان في السبعينيات 1970، وكان من نوع LISP ويسمّى MACSYMA.

سنستخدم النظام الحاسوبي الجبري Maple حيثما كان مناسبًا كما ذكرنا في المقدمة.

إن الأنظمة الحاسوبية الجبرية (CAS) مفيدة في الاشتقاق الرمزي، وفي رسم الأشكال خصوصًا نوضح استخدام هاتين التقنيتين في المثال (1).

مثال 1

استخدم Maple لإيجاد $\max_{a\leq x\leq b}|f(x)|$ للدّالة $f(x) = 5\cos 2x - 2x\sin 2x$ على الفترتين $[1, 2]$ و $[0.5, 1]$.

سنبدأ أولًا بإمكانات Maple في الرسم. ولكي تتمكن من استخدام برمجية الرسم الكاملة؛ أدخل الأمر

```
>with(plots);
```

فتظهر لك قائمة أوامر ضمن البرمجية.

عرّف f بإدخال

```
>f:= 5*cos(2*x)-2*x*sin(2*x);
```

إذ تعطيك Maple الآتي

$$f := 5\cos(2x) - 2x\sin(2x)$$

استخدم الأمر

```
>plot(f,x=0.5..2);
```

لكي ترسم f على الفترة $[0.5, 2]$؛

يمكننا تحديد إحداثيات أي نقطة على الرسم عن طريق تحريك مؤشر الفأرة إلى النقطة، ونقر زر الفأرة الأيسر، فتظهر عندئذ إحداثيات النقطة التي حدّدتها بالمؤشر في الصندوق الأبيض على الزاوية العليا اليسرى لشاشة Maple، وتظهر في الشكل (6.1) أيضًا، إن هذه الطريقة مفيدة لتقرير إحداثيات نقاط القيم المتطرفة للدّالات.

ثم نكمل حل المثال باستخدام مبرهنة القيمة الوسيطية.

أولًا: خذ الفترة $[1, 2]$ للحصول على المشتقة الأولى $g = f'$، أدخل

```
>g:=diff(f,x);
```

يعطيك Maple

$$g := -12\sin(2x) - 4x\cos(2x)$$

يمكنك عندئذ أن تحل $g(x) = 0$ للقيم $1 \leq x \leq 2$

وذلك باستخدام

```
>fsolve(g,x,1..2);
```

فتحصل على 1.358229874 وتحسب $f(1.358229874) = -5\ 675301338$

وذلك باستخدام

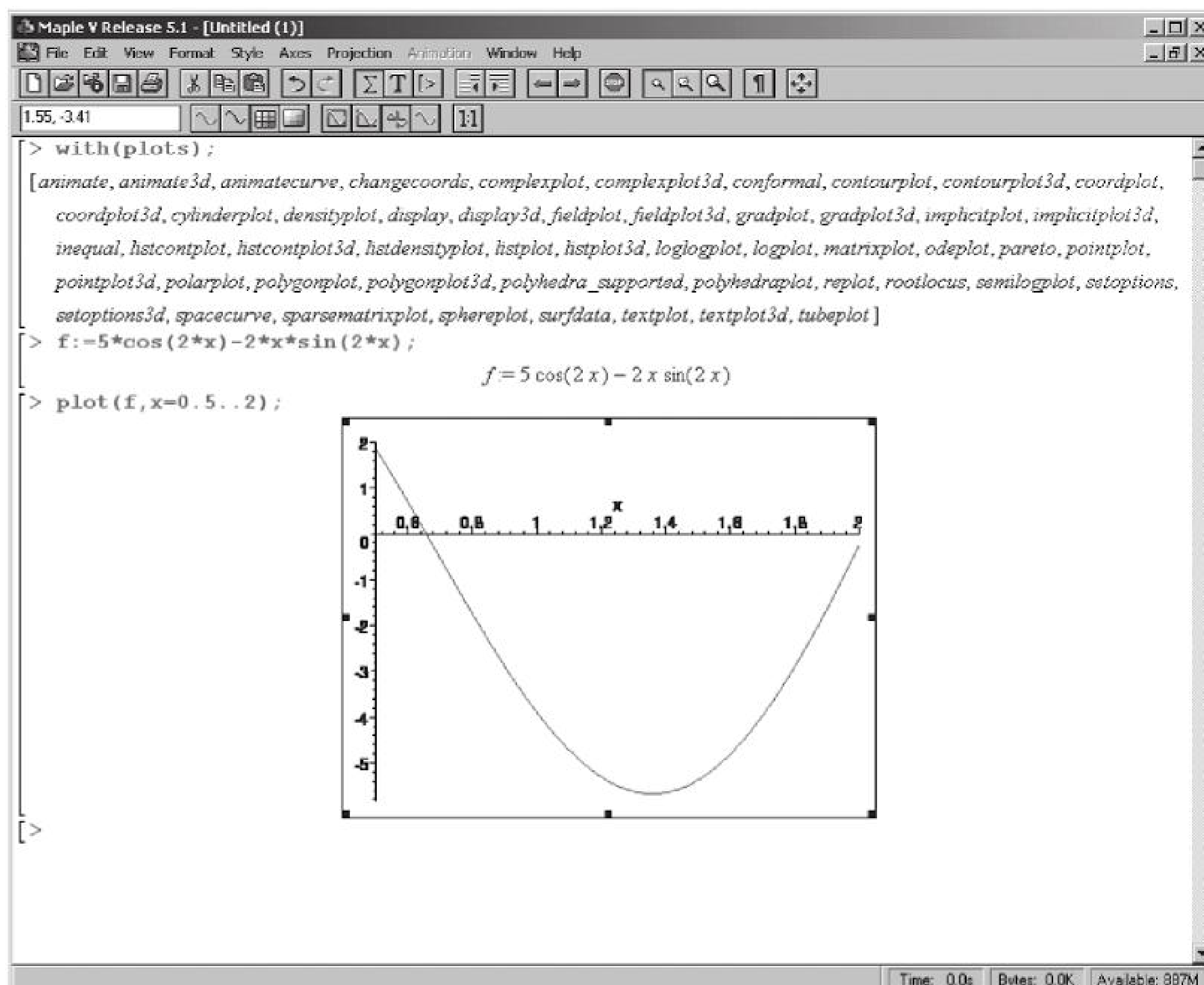
```
>evalf(subs(x=1.358229874,f));
```

إن هذا يعني وجود قيمة صغرى تساوي تقريبًا $f(1.358229874) = -5.675301338$.

وإن ما نحتاج إليه في كثير من الأحيان هو القيمة العظمى التي تحققها الدّالة على فترة ما، وتحدث القيمة العظمى على نقطة حرجة أو على أحد حدود الفترة. وبما أن $f(1) = -3.899329037$ و $f(2) = -0.241008124$ فإن القيمة العظمى تحدث على النقطة الحرجة ويكون

بدئ بالعمل على تطوير مشروع "مابل" في جامعة واترلو في نهاية ثمانينيات القرن العشرين. وكان الهدف منه جعله في متناول أيدي الباحثين الرياضيين، والمهندسين، والعلماء، إضافة إلى توفيره للطلاب من أجل أغراض تربوية. وحتى يكون المشروع فاعلًا، يجب أن يكون قابلًا للنقل، ومناسبًا من حيث المكان والزمان. قدمت عروض للنظام في عام 1982، وأما العرض المكتوب الرئيس لمعايير تصميم نظام "مابل" فقد قُدّم عام 1983 [CGG6].

شكل 6.1



$$\max_{1\le x\le 2}|f(x)| = \max_{1\le x\le 2}|5\cos 2x - 2x\sin 2x| = |f(1.358229874)| = 5.675301338$$

وإذا ما أردنا حل $g(x) = 0$ على الفترة $0.5 \le x \le 1$ فإننا نجد ذلك عند إدخال

>fsolve(g,x,0.5..1)

ويعطينا Maple

$$\text{fsolve}(-12\sin(2x) - 4x\cos(2x), x, .5..1)$$

إن هذا يعني أن Maple لم يتمكن من إيجاد حل على الفترة [0.5, 1].

وبما أن $f(0.5)= 1.860040545$ و $f(1)= -3.899329037$ نجد أن

$$\max_{0.5\le x\le 1}|f(x)| = \max_{0.5\le x\le 1}|5\cos 2x - 2x\sin 2x| = |f(1)| = 3.899329037$$ ■

ويوجد مفهوم آخر في التفاضل والتكامل يُستخدم بصورة مكثفة وهو تكامل ريمان.

تعريف 10.1 تكامل ريمان للدّالة f على الفترة $[a, b]$ هو النهاية الآتية شرط وجودها.

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\max \Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(z_i)\,\Delta x_i$$

لقد اكتشف جورج ريمان (1826–1866) كثيرًا من الأمور حول تصنيف الدّوال التي لها تكاملات، وقد ساهم في أعمال مهمة في الهندسة ومبرهنة الأعداد المركبة أيضًا. ويعدّ من الرياضيين المشهورين في القرن التاسع عشر.

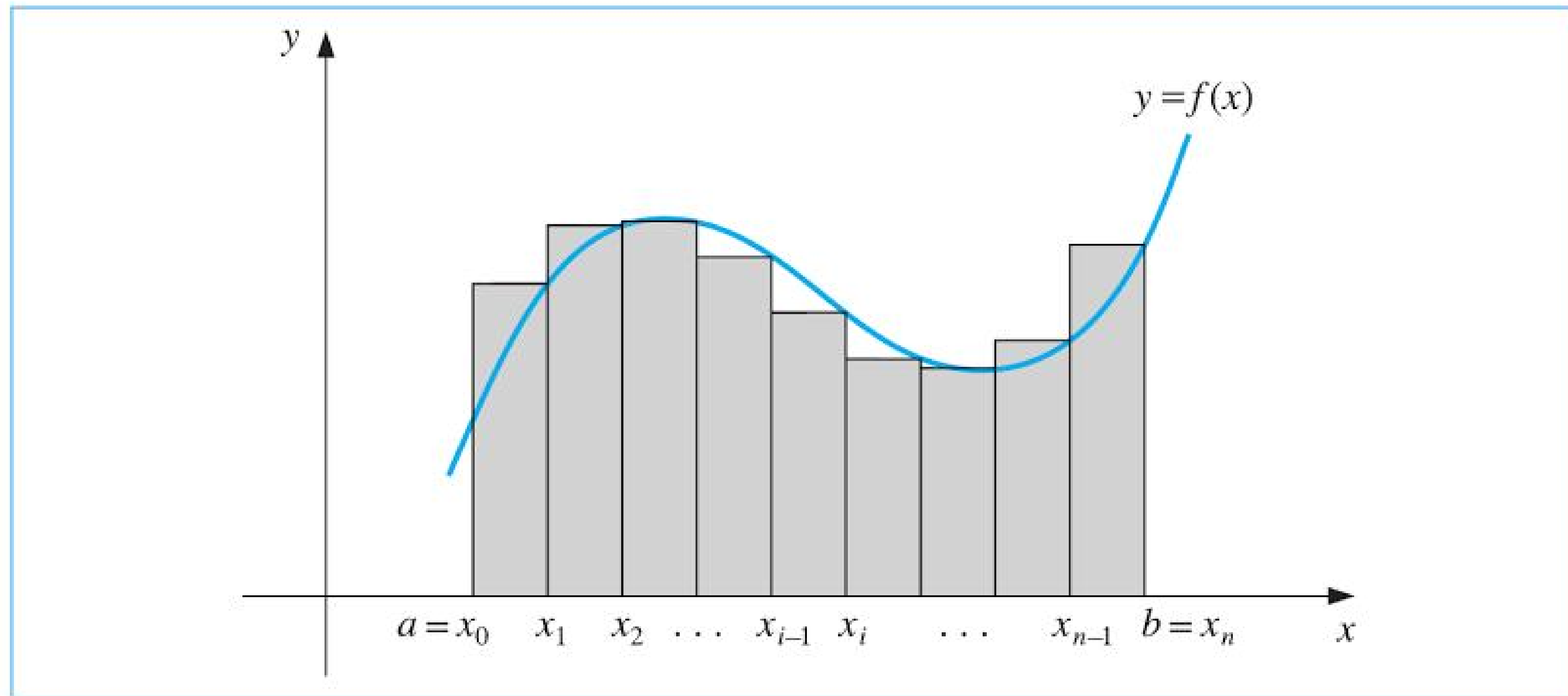
حيث إن الأعداد $(x_0, x_1, \ldots, x_n)$ تحقّق $a = x_0 \le x_1 \le \cdots \le x_n = b$ وحيث $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ لكل $(i = 1, 2, \ldots, n)$ وحيث (z_i) أي عدد نختاره عشوائيًّا في الفترة $[x_{i-1}, x_i]$. ■

إذا كانت الدّالة f متصلة على الفترة $[a, b]$ فإنها قابلة لتكامل ريمان على الفترة $[a, b]$. وإن هذا الأمر يسمح لنا – ولسهولة الحساب – باختيار النقاط (x_i) لتكون متساوية البعد في $[a, b]$، واختيار $(z_i = x_i)$ لكل $(i = 1, 2, \ldots, n)$، وفي هذه الحالة يكون

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \frac{b-a}{n} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)$$

حيث إن الأعداد(x_i) في الشكل (7.1) هي $x_i = a + i(b-a)/n$.

شكل 7.1



هناك نتيجتان أخريان نحتاج إليهما في التحليل العددي، الأولى هي تعميم للمبرهنة المعروفة بمبرهنة القيمة الوسيطية للتكامل.

مبرهنة 11.1 مبرهنة القيمة الوسيطية الموزونة للتكامل
Weighted Mean Value Theorem for Integrals

إذا كانت $f \in C\ [a, b]$ وكان تكامل ريمان للدّالة $g(x)$ موجودًا على $[a, b]$، وكانت $g(x)$ لا تغير إشارتها على $[a, b]$ فإنه يوجد عدد c في (a,b) بحيث

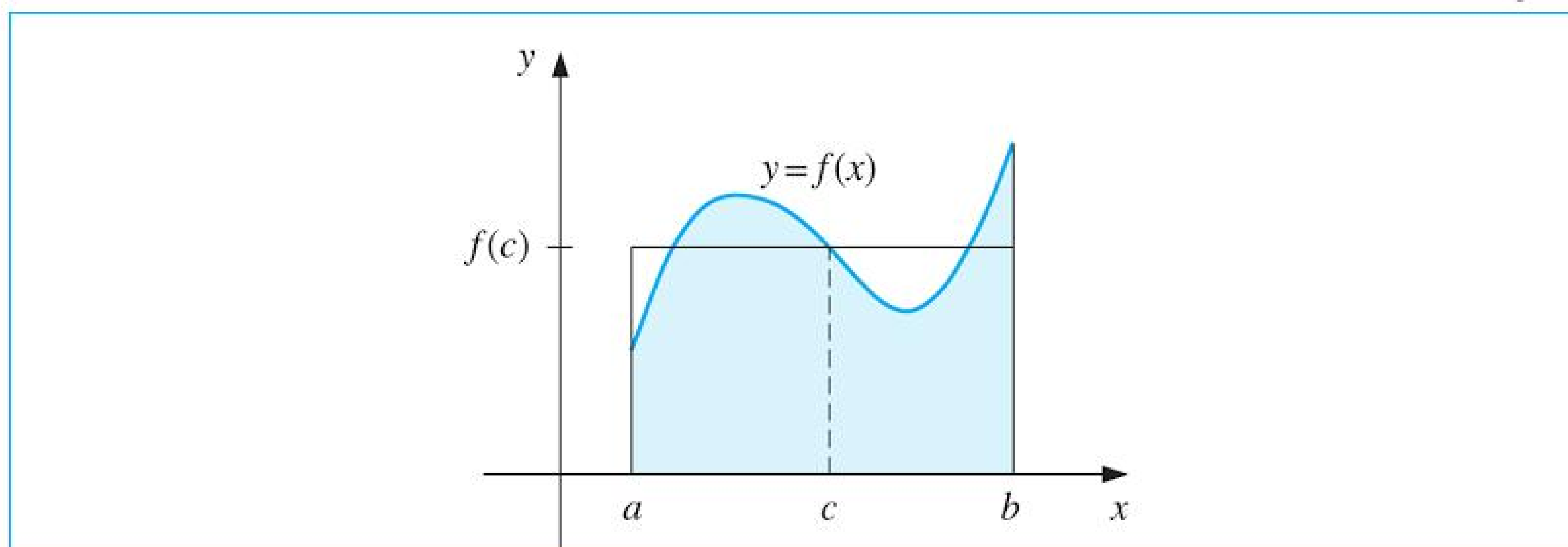
$$\int_a^b f(x)\, g(x)\, dx = f(c) \int_a^b g(x)\, dx$$ ■

وعندما يكون $g(x)=1$ فإن المبرهنة (11.1) هي مبرهنة القيمة الوسيطية للتكامل العادية؛ إذ تعطى القيمة الوسيطية لقيمة الدّالة f على الفترة $[a, b]$ بالصيغة

$$f(c) = \frac{1}{b-a} \int_a^b g(x)\, dx$$

انظر شكل (8.1).

شكل 8.1



عادة لا يقدم برهان المبرهنة (11.1) في كتب التفاضل والتكامل الرئيسة، ولكنه يقدم في معظم كتب التحليل (انظر على سبيل المثال [Fu, p.162]).

كما لا تقدم المبرهنة الثانية التي نحتاج إليها عادة في مقرر التفاضل والتكامل الرئيس، والتي يمكن إثباتها بتطبيق مبرهنة رول على نحو متتالٍ على الدوال $(f, f',...)$ إلى أن نصل في النهاية إلى $f^{(n-1)}$.

مبرهنة 12.1 تعميم مبرهنة رول Generalized Rolle's Theorem

افترض أن $f \in C[a, b]$ قابل للاشتقاق n من المرات على الفترة (a,b). إذا كان $f(x)$ يساوي صفرًا على $(n+1)$ من الأعداد المختلفة $x_0, \ldots, x_n$ في الفترة $[a, b]$، فإنه يوجد عدد c في الفترة (a,b) بحيث $f^{(n)}(c) = 0$. ■

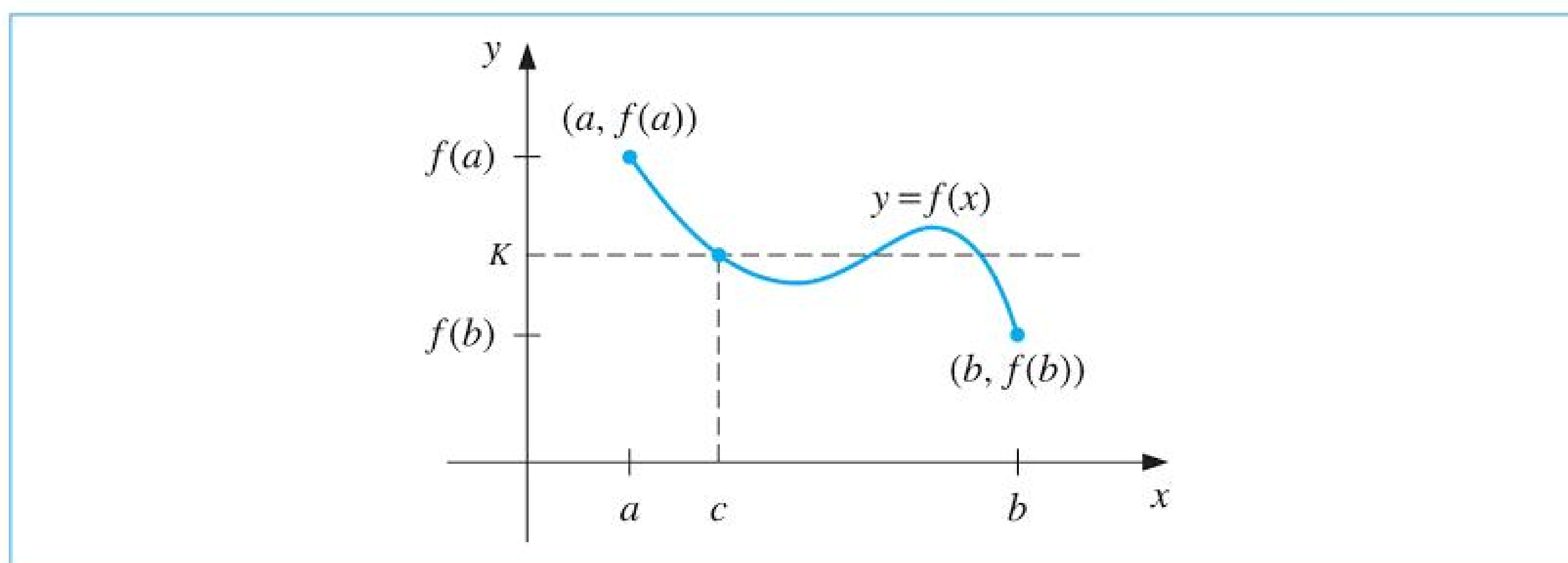
المبرهنة الآتية هي مبرهنة القيمة الوسيطية، ومع معقولية منطوقها حسبما يظهر، فإن البرهان خارج عن نطاق أي مقرر عادي في التفاضل والتكامل. ويمكن إيجاد البرهان في معظم كتب التحليل. (انظر على سبيل المثال [Fu, p.67]).

مبرهنة 13.1 مبرهنة القيمة الوسيطية Intermediate Value Theorem

إذا كان $f \in C[a, b]$، وكان K أي عدد يقع بين $f(a)$ و $f(b)$ فإنه يوجد عدد c في (a,b) حيث $f(c) = K$. ■

يبيِّن الشكل (9.1) أحد خيارات العدد الذي تضمن وجوده مبرهنة القيمة الوسيطية. وفي هذا المثال يوجد اختياران آخران لهذا العدد.

شكل 9.1



مثال 2

لإثبات أن $x^5-2x^3+3x^2-1=0$ لها حل في الفترة $[0,1]$؛ ضع $f(x)=x^5-2x^3+3x^2-1$

لدينا الآن

$$f(0)=-1<0 \quad \text{و} \quad 0<1=f(1)$$

حيث إن f متصلة. لذلك فإن مبرهنة القيمة الوسيطية تضمن وجود عدد x في الفترة $0<x<1$ يحقق $x^5-2x^3+3x^2-1=0$. ■

ويظهر في المثال (2) أيضًا أن مبرهنة القيمة الوسيطية تستخدم لتحديد توقيت وجود الحلول لبعض المسائل، ولكنها لا تعطي طريقة فاعلة لإيجاد الحلول. وسندرس ذلك في الباب (2).

المبرهنة الأخيرة في هذه المراجعة للتفاضل والتكامل تصف كثيرات الحدود لتايلور (Taylor). حيث تستخدم كثيرات الحدود هذه بصورة مكثفة في التحليل العددي.

مبرهنة 14.1

مبرهنة تايلور Taylor's Thoerem

لقد وصف بروك تايلور (1685–1731) هذه السلسلة عام 1715 في مقالته "Methodus incrementorum directa et inversa" هناك حالة خاصة لهذه النتيجة، وقد تكون النتيجة نفسها معروفة في وقت سابق لدى إسحاق نيوتن وجيمس غريغوري وآخرين.

افترض أن $f\in C^n[a,b]$، وأن $f^{(n+1)}$ موجودة على $[a,b]$، و $x_0\in[a,b]$. عندئذ لكل $x\in[a,b]$ يوجد عدد $\xi(x)$ بين x_0 و x بحيث يكون $f(x)=P_n(x)+R_n(x)$ و

$$P_n(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$
$$=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$$

و

$$R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(\xi(x))}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$$

■

تسمّى $P_n(x)$ كثيرة حدود تايلور من الرتبة n للدّالة f حول x_0، ويسمّى $R_n(x)$ الحدّ الباقي (أو خطأ القطع) المرتبط بـ $P_n(x)$.

وبما أن العدد $\xi(x)$ في خطأ القطع $R_n(x)$ يعتمد على قيمة x التي تحسب عندها كثيرة الحدود $R_n(x)$، فهو دالّة في الوسيط x. وعلى الرغم من ذلك، يجب أن لا نتوقع أن نكون قادرين على حساب قيمة الدّالة $\xi(x)$ بصورة صريحة.

لقد اشتهر كولن ماكلورين (1698–1746) بأنه المدافع عن حساب التفاضل والتكامل الذي بلوره نيوتن، عندما كان هذا الموضوع يتعرض لهجوم شرس من قبل ألبيشوب جورج بيركلي.

لم يكتشف ماكلورين السلسلة التي تحمل اسمه، حيث كانت معروفة لدى الرياضيين في القرن السابع عشر قبل مولده. وعلى كل حال فلقد اكتشف طريقة نظام المعادلات الخطية كلها باستخدام قاعدة كرامر التي لم ينشرها كرامر إلا في عام 1750.

تضمن مبرهنة تايلور وجود مثل هذه للدّالة، وتقع قيمتها ما بين قيمتي x_0 و x. وفي الحقيقة فإن إحدى مشاكل الطرائق العددية هي محاولة حساب الحد المعقول لقيمة $f^{(n+1)}(\xi(x))$ عندما تكون x ضمن فترة محدّدة.

إن السلسلة اللانهائية التي نحصل عليها عند أخذ نهاية $P_n(x)$ عندما $n\to\infty$ تسمّى سلسلة تايلور للدّالة f حول x_0. وفي حالة $x_0=0$، فإن كثيرة حدود تايلور عادة ما تسمّى كثيرة حدود ماكلورين، وعادة ما تسمّى سلسلة تايلور بسلسلة ماكلورين Maclaurin.

إن خطأ القطع في كثيرة حدود تايلور يشير إلى الخطأ الناتج عن استخدام حاصل جمع مقطوع أو منتهٍ (نهائي) لتقريب حاصل جمع سلسلة لانهائية.

مثال 3

أوجد (أ) كثيرة حدود تايلور من الرتبة الثانية.

(ب) كثيرة حدود تايلور من الرتبة الثالثة للدّالة $f(x)=\cos x$ حول $x_0=0$، ثم استخدم كثيرات الحدود هذه لتقريب قيمة $\cos(0.01)$.

(ج) استخدم كثيرة حدود تايلور من الرتبة الثالثة والحدّ الباقي المرتبط به لتقريب $\int_0^{0.1} \cos x\, dx$

بما أن $f \in C^\infty(\mathbb{R})$، فإنه يمكن تطبيق مبرهنة تايلور لكل $n \geq 0$. بملاحظة أن

$$f'(x) = -\sin x,\ f''(x) = -\cos x,\ f'''(x) = \sin x \text{ and } f^{(4)}(x) = \cos x$$

نجد أن

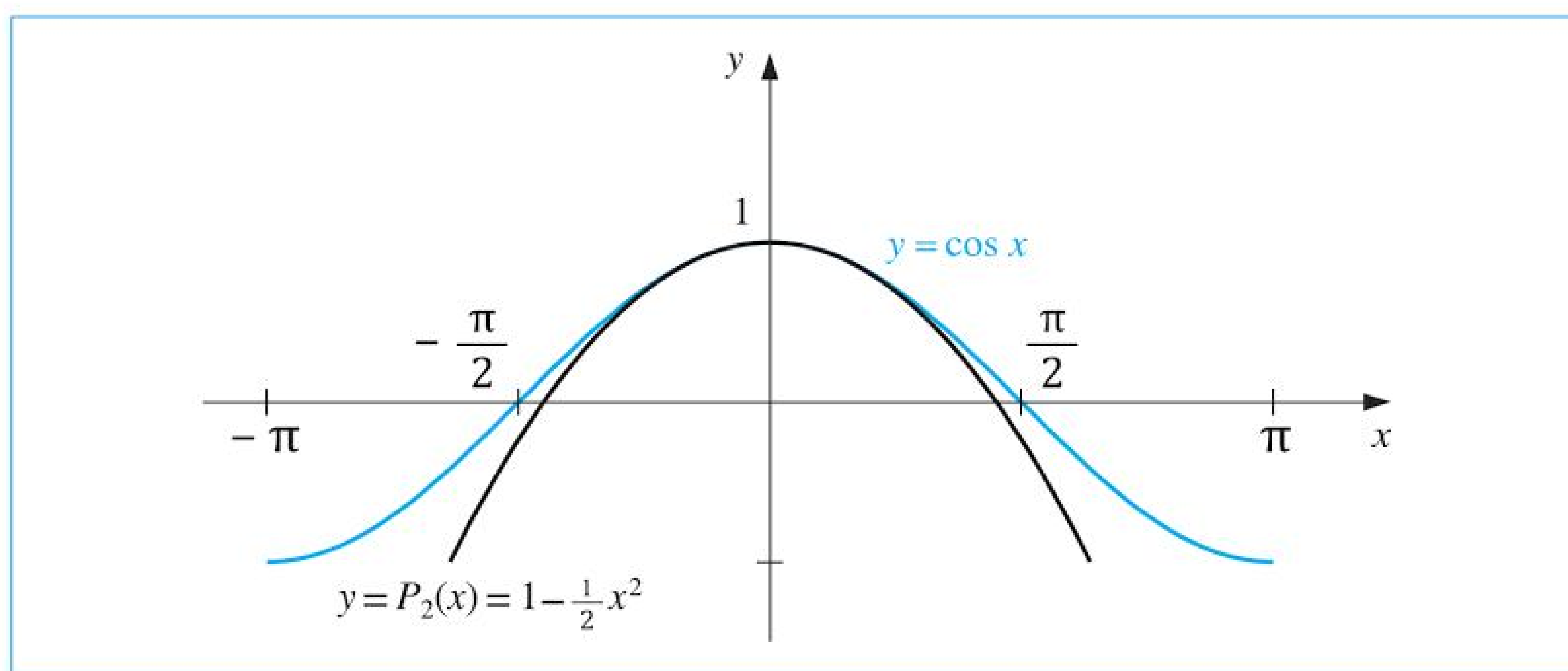
$$f(0) = 1,\ f'(0) = 0,\ f''(0) = -1 \text{ and } f'''(0) = 0$$

(أ) عندما $n = 2$ و $x_0 = 0$ يكون لدينا

$$\cos x = f(0) + f'(0)\,x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(\xi(x))}{3!}x^3 \quad \xi(x)$$
$$= 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 \sin\xi(x)$$

حيث إن $\xi(x)$ عدد (عادة ما يكون غير معلوم) بين 0 و x. (انظر شكل 10.1)

شكل 10.1



عندما يكون $x = 0.01$ فإننا نحصل من الصيغة أعلاه على

$$\cos(0.01) = 1 - \frac{1}{2}(0.01)^2 + \frac{1}{6}(0.01)^3 \sin\xi(0.01) = 0.99995 + \frac{10^{-6}}{6}\sin\xi(0.01)$$

عندئذ فإن تقريب قيمة $\cos(0.01)$ الذي نحصل عليه باستخدام كثيرة حدود تايلور هو 0.99995.
وإن خطأ القطع أو الحد الباقي المرتبط بهذا التقريب هو

$$\frac{10^{-6}}{6}\sin\xi(0.01) = 0.1\overline{6} \times 10^{-6}\sin\xi(0.01)$$

حيث الخط المستخدم فوق العدد 6 في $0.1\overline{6}$ يعني أن العدد العشري هو عدد دوري (يكرّر نفسه إلى ما لانهاية).

وعلى الرغم من أننا لا نملك طريقة لتحديد $\sin\xi(0.01)$، فإننا نعرف أن جميع قيم الجيب تقع في الفترة $[-1,1]$، ولذلك فإن الخطأ الحاصل باستخدام التقريب 0.99995 لقيمة $\cos(0.01)$ يكون محدودًا بالقيمة

$$|\cos(0.01) - 0.99995| = 0.1\overline{6} \times 10^{-6}\sin\xi(0.01) \leq 0.1\overline{6} \times 10^{-6}$$

وبهـــذا فإن هذا التقريب 0.99995 يتفق مع الخانات الخمس الأولى على الأقل لقيمة $\cos(0.01)$

ويكون

$$0.99994983 < 0.99995 - 0.1\overline{6} \times 10^{-6} \le \cos(0.01) \le 0.99995 + 0.1\overline{6} \times 10^{-6} < 0.99995017$$

إن حد الخطأ أكبر بكثير من الخطأ الحقيقي، وهذا يُعزى جزئيًّا إلى استخدام حد غير دقيق (ضعيف) للقيمة $|\sin\xi(0.01)|$. يمكن برهنة أن $|\sin\xi(0.01)| \le |x|$ لجميع قيم x.

بما أن $0 \le \xi < 0.01$، فبإمكاننا استخدام حقيقة أن $|\sin\xi(0.01)| \le 0.01$ في صيغة الخطأ، ومن ثم نحصل على الحد $0.1\overline{6} \times 10^{-8}$.

(ب) بما أن $f'''(0) = 0$ فإن كثيرة حدود تايلور من الرتبة الثالثة مع حد الباقي حول $x_0 = 0$ هو

$$\cos x = 1 - \tfrac{1}{2}x^2 + \tfrac{1}{24}x^4 \cos\tilde{\xi}(x)$$

حيث إن $0 < \tilde{\xi}(x) < 0.01$. تبقى كثيرة الحدود المُقرِّبة نفسها، ويبقى التقريب 0.99995 ولكن لدينا الآن دقة أفضل بكثير. وبما أن $|\cos\tilde{\xi}(x)| \le 1$ لقيم x جميعها يكون لدينا

$$\left|\tfrac{1}{24}x^4 \cos\tilde{\xi}(x)\right| \le \tfrac{1}{24}(0.01)^4(1) < 4.2 \times 10^{-10}$$

ولذلك

$$|\cos(0.01) - 0.99995| \le 4.2 \times 10^{-10}$$

و

$$0.99994999958 = 0.99995 - 4.2 \times 10^{-10} \le \cos(0.01) \le 0.99995 + 4.2 \times 10^{-10} = 0.99995000042$$

يفسر أول جزأين من المثال هدفي التحليل العددي:

(i) إيجاد تقريب لحل مسألة معطاة.

(ii) إيجاد حد لخطأ التقريب.

لقد أعطت كثيرات حدود تايلور الإجابة نفسها للمطلوب (i)، ولكن كثيرة حدود تايلور من الرتبة الثالثة أعطت إجابة للمطلوب (ii) أفضل كثيرًا من إجابة كثيرة حدود تايلور من الرتبة الثانية.

(ج) إن استخدام كثيرة حدود تايلور من الرتبة الثالثة يعطي

$$\int_0^{0.1} \cos x\, dx = \int_0^{0.1} \left(1 - \frac{1}{2}x^2\right) dx + \frac{1}{24}\int_0^{0.1} x^4 \cos\tilde{\xi}(x)\, dx$$

$$= \left[x - \frac{1}{6}x^3\right]_0^{0.1} + \frac{1}{24}\int_0^{0.1} x^4 \cos\tilde{\xi}(x)\, dx$$

$$= 0.1 - \frac{1}{6}(0.1)^3 + \frac{1}{24}\int_0^{0.1} x^4 \cos\tilde{\xi}(x)\, dx$$

وعندئذ

$$\int_0^{0.1} \cos x\, dx \approx 0.1 - \frac{1}{6}(0.1)^3 = 0.0998\overline{3}$$

يحدّد حد الخطأ في التقريب من تكامل حد الباقي لتايلور واستخدام حقيقة أن $|\cos \xi(x)| \leq 1$ لقيم x جميعها حيث

$$\frac{1}{24}\left|\int_0^{0.1} x^4 \cos\tilde{\xi}(x)\right| \leq \frac{1}{24}\int_0^{0.1} x^4|\cos\tilde{\xi}(x)|\, dx$$

$$\leq \frac{1}{24}\int_0^{0.1} x^4\, dx = 8.\overline{3}\times 10^{-8}$$

وبما أن القيمة الحقيقية للتكامل هي

$$\int_0^{0.1} \cos x\, dx = \sin x\Big]_0^{0.1} = \sin 0.1 = 0.099833416647$$

فإن الخطأ الحقيقي لهذا التقريب هو 8.3314×10^{-8}، وهو ضمن حدّ الخطأ.

■

ويمكننا استخدام CAS في المثال (3).

باستخدام Maple، نعرّف f كما يلي:

```
>f:=cos(x);
```

إن Maple يسمح باستخدام عبارات متعددة متتالية في سطر واحد واستخدام (:) لإيقاف استجابات Maple. فعلى سبيل المثال نحصل على كثيرة حدود تايلور باستخدام

```
>s3:=taylor(f,x=0,4): p3:=convert(s3, polynom);
```

إن العبارة s3:=taylor(f,x=0,4) تحدد كثيرة حدود تايلور حول $x_0 = 0$ بأربعة حدود (الرتبة 3) والباقي المرتبط بها.

وتحوّل العبارة p3:=convert(s3, polynom) السلسلة s3 إلى كثيرة الحدود p3 بإسقاط الباقي.

ولكي نحصل على 11 منزلة في الجواب، ندخل

```
>Digits:=11;
```

ونجد قيمة $f(0.01), P_3(0.01)$ و $|f(0.01) - P_3(0.01)|$ عن طريق

```
>y1:=evalf(subs(x=0.01,f));
>y2:=evalf(subs(x=0.01,p3));
>err:=abs(y1-y2);
```

هذا يعطينا $y_1 = f(0.01) = 0.99995000042,\ y_2 = P_3(0.01) = 0.99995000000,$

و $|f(0.01) - P_3(0.01)| = .42\times 10^{-9}$

للحصول على رسم مشابه للرسم المبين في شكل (10.1)؛ أدخل

```
>plot({f,p3},x=-Pi..Pi);
```

إن أوامر التكامل هي

```
>q1:=int(f,x=0..0.1);
>q2:=int(p3,x=0..0.1);
>err:=abs(q1-q2);
```

وتعطي القيم

$$q_1 = \int_0^{0.1} f(x)\, dx = 0.099833416647 \quad \text{و} \quad q_2 = \int_0^{0.1} P_3(x)\, dx = 0.099833333333$$

بخطأ مقداره $8.3314\times 10^{-8} = 0.83314\times 10^{-7}$.

إن الفقرتين (أ) و (ب) في المثال تدلان على كيفية إعطاء تقنيتي التقريب نفسه، لكنهما

تختلفــان في درجة الدقة. تذكّر أن تحديـــد التقريب جزء واحد من هدفنا، وأن الجزء الذي لا يقل عنه أهمية هو إيجاد حد لخطأ التقريب.

مجموعة التمارين 1.1 EXERCISE SET

1. بيِّن أن كلاً من الصيغ الآتية لها حل واحد على الأقل في الفترات المعطاة:
   أ. $x \cos x - 2x^2 + 3x - 1 = 0$ ‏ $[0.2, 0.3]$ و $[1.2, 1.3]$
   ب. $(x-2)^2 - \ln x = 0$ ‏ $[1, 2]$ و $[e, 4]$
   ج. $2x \cos(2x) - (x-2)^2 = 0$ ‏ $[2, 3]$ و $[3, 4]$
   د. $x - (\ln x)^x = 0$ ‏ $[4, 5]$
2. أوجد فترات تحتوي على حلول للصيغ الآتية:
   أ. $x - 3^{-x} = 0$
   ب. $4x^2 - e^x = 0$
   ج. $x^3 - 2x^2 - 4x + 2 = 0$
   د. $x^3 + 4.001x^2 + 4.002x + 1.101 = 0$
3. بين أن $f'(x)$ يكون صفرًا على الأقل مرّة واحدة في الفترة المعطاة:
   أ. $f(x) = 1 - e^x + (e-1)\sin((\pi/2)x)$ ‏ $[0, 1]$
   ب. $f(x) = (x-1)\tan x + x \sin \pi x$ ‏ $[0, 1]$
   ج. $f(x) = x \sin \pi x - (x-2)\ln x$ ‏ $[1, 2]$
   د. $f(x) = (x-2)\sin x \ln(x+2)$ ‏ $[-1, 3]$
4. أوجد $\max_{a \le x \le b} |f(x)|$ لكل من الدّوال والفترات الآتية:
   أ. $f(x) = (2 - e^x + 2x)/3$ ‏ $[0, 1]$
   ب. $f(x) = (4x-3)/(x^2 - 2x)$ ‏ $[0.5, 1]$
   ج. $f(x) = 2x\cos(2x) - (x-2)^2$ ‏ $[2, 4]$
   د. $f(x) = 1 + e^{-\cos(x-1)}$ ‏ $[1, 2]$
5. استخدم مبرهنة القيمة الوسيطية ومبرهنة رول لإثبات أن الدّالة $f(x) = x^3 + 2x + k$ يقطع محور البيانات (محور x) مرّة واحدة فقط مهما كانت قيمة الثابت k.
6. ليكن $f \in C[a, b]$ و $f'(x)$ موجودًا على (a, b).
   إذا كان $f'(x) \neq 0$ لكل $x \in (a,b)$ فأثبت وجود عدد واحد $p \in [a, b]$ على الأكثر يحقق $f(p) = 0$
7. ليكن $f(x) = x^3$.
   أ. أوجد كثيرة حدود تايلور $P_2(x)$ من الرتبة الثانية حول $x_0 = 0$.
   ب. أوجد $R_2(0.5)$، والخطأ الحقيقي الناتج من استخدام $P_2(0.5)$ لتقريب $f(0.5)$.
   ج. كرّر الفقرة (أ) مستخدمًا $x_0 = 1$.
   د. كرّر الفقرة (ب) مستخدمًا كثيرة الحدود من الفقرة (جـ).
8. أوجـــد كثيــرة حدود تايلــور من الرتبـــة الثالثة $P_3(x)$ للدّالـــة $f(x) = \sqrt{x+1}$ حول $x_0 = 0$
   قرّب القيم $\sqrt{0.5}$, $\sqrt{0.75}$, $\sqrt{1.25}$, $\sqrt{1.5}$ باستخدام $P_3(x)$، وأوجد الأخطاء الحقيقية.
9. أوجد كثيرة حدود تايلور من الرتبة الثانية $P_2(x)$ للدّالة $f(x) = e^x \cos x$ حول $x_0 = 0$.
   أ. اســتخدم $P_2(0.5)$ لتقريب $f(0.5)$ أوجد الحد الأعلى للخطأ $|f(0.5) - P_2(0.5)|$ مستخدمًا صيغة الخطأ، وقارن ذلك بالخطأ الحقيقي.
   ب. أوجد حدًّا للخطأ $|f(x) - P_2(x)|$ الناتج عن استخدام $P_2(x)$ لتقريب $f(x)$ على الفترة $[0, 1]$.
   ج. قرّب $\int_0^1 f(x)\,dx$ مستخدمًا $\int_0^1 P_2(x)\,dx$.

د. أوجد حدًّا أعلى للخطأ في الفقرة (ج) مستخدمًا $\int_0^1 |R_2(x)\,dx|$، وقارن ذلك الحد بالخطأ الحقيقي.

10 . كرّر المطلوب في التمرين (9) مستخدمًا $x_0 = \pi/6$.

11 . أوجد كثيرة حدود تايلور من الرتبة الثالثة $P_3(x)$ للدّالة $f(x) = (x-1)\ln x$ حول $x_0 = 1$.

أ. استخدم $P_3(0.5)$ لتقريب $f(0.5)$، جد حدًّا أعلى للخطأ $|f(0.5) - P_3(0.5)|$ مستخدمًا صيغة الخطأ، ثم قارن ذلك بالخطأ الحقيقي.

ب. أوجد حدًّا للخطأ $|f(x) - P_3(x)|$ الناتج من استخدام $P_3(x)$ لتقريب $f(x)$ على الفترة $[0.5, 1.5]$.

ج. قرّب $\int_{0.5}^{1.5} f(x)\,dx$ باستخدام $\int_{0.5}^{1.5} P_3(x)\,dx$.

د. أوجد حدًّا أعلى للخطأ في (جـ) باستخدام $\int_{0.5}^{1.5} |R_3(x)\,dx|$، وقارن ذلك بالخطأ الحقيقي.

12 . ليكن $f(x) = 2x\cos(2x) - (x-2)^2$ و $x_0 = 0$.

أ. أوجد كثيرة حدود تايلور من الرتبة الثالثة $P_3(x)$، واستخدمه لتقريب $f(0.4)$.

ب. استخدم صيغة الخطأ في مبرهنة تايلور لإيجاد حد أعلى للخطأ $|f(0.4) - P_3(0.4)|$ واحسب الخطأ الحقيقي.

ج. أوجد كثيرة حدود تايلور من الرتبة الرابعة $P_4(x)$، واستخدمه لتقريب $f(0.4)$.

د. استخدم صيغة الخطأ في مبرهنة تايلور لإيجاد حد أعلى للخطأ $|f(0.4) - P_4(0.4)|$، واحسب الخطأ الحقيقي.

13 . أوجد كثيرة حدود تايلور من الرتبة الرابعة $P_4(x)$ للدّالة $f(x) = xe^{x^2}$ حول $x_0 = 0$.

أ. جد حدًّا أعلى للمقدار $|f(x) - P_4(x)|$ على الفترة $0 \le x \le 0.4$.

ب. قرّب $\int_0^{0.4} f(x)\,dx$ مستخدمًا $\int_0^{0.4} P_4(x)\,dx$.

جـ. أوجد حدًّا أعلى للخطأ في (ب) باستخدام $\int_0^{0.4} P_4(x)\,dx$.

د. قرّب $f'(0.2)$ باستخدام $P_4'(0.2)$ وأوجد الخطأ.

14 . استخدم حد الخطأ لكثيرة حدود تايلور لتقدير الخطأ الناتج من استخدام $\sin x \approx x$ في تقدير $\sin 1°$.

15 . استخدم كثيرة حدود تايلور حول $\pi/4$ لتقريب $\cos 42°$ بدرجة دقة 10^{-6}.

16 . ليكن $f(x) = e^{x/2}\sin(x/3)$، استخدم مابل Maple لإيجاد ما يأتي:

أ. كثيرة حدود ماكلورين من الرتبة الثالثة $P_3(x)$.

ب. $f^{(4)}(x)$ وحدًّا للخطأ $|f(x) - P_3(x)|$ على $[0, 1]$.

17. ليكن $f(x) = \ln(x^2 + 2)$، استخدم مابل Maple لإيجاد ما يأتي:

أ. كثيرة حدود تايلور $P_3(x)$ لنشر f حول $x_0 = 1$.

ب. القيمة العظمى للخطأ $|f(x) - P_3(x)|$ على الفترة $0 \le x \le 1$.

جـ. كثيرة حدود ماكلورين $\tilde{P}_3(x)$ للدّالة f.

د. القيمة العظمى للخطأ $|f(x) - \tilde{P}_3(x)|$ على الفترة $0 \le x \le 1$.

هـ. هل التقريب $P_3(0)$ للقيمة $f(0)$ أفضل من التقريب $\tilde{P}_3(1)$ للقيمة $f(1)$؟

18 . ليكن $f(x) = (1-x)^{-1}$ و $x_0 = 0$، أوجد كثيرة حدود تايلور $P_n(x)$ من الرتبة n للدّالة $f(x)$ حول x_0، وأوجد قيمة n الضرورية ليكون $P_n(x)$ تقريبًا للدّالة $f(x)$ ضمن 10^{-6} على الفترة $[0, 0.5]$.

19 . ليكن $f(x) = e^x$ و $x_0 = 0$.

أ. أوجد كثيرة حدود تايلور $P_n(x)$ من الرتبة n للدّالة $f(x)$ حول x_0.

ب. أوجد قيمة n الضرورية ليكون $P_n(x)$ تقريبًا للدّالة $f(x)$ ضمن 10^{-6} على الفترة $[0, 0.5]$.

20. أوجد كثيرة حدود ماكلورين $P_n(x)$ من الرتبة n للدّالة $f(x) = \arctan x$.

21. استخدم $P_2(x) = 1 - \frac{1}{2}x^2$ لتقدير $f(x) = \cos x$ على الفترة $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$. وأوجد حدًّا لأكبر خطأ.

22. إن كثيرة حدود تايلور من الرتبة n للدّالة f على x_0 يُشار إليها بعض الأحيان بأنها كثيرة الحدود من الأعلى رتبة n التي تعطي "أفضل" تقريب للدّالة f بالقرب من x_0.

أ. اشرح سبب كون هذا الوصف دقيقًا.

ب. أوجد كثيرة الحدود التربيعية التي تعطي أفضل تقريب للدّالة f بالقرب من $x_0 = 1$ إذا كانت صيغة خط المماس عند $x_0 = 1$ هي $y = 4x - 1$ وكان $f''(1) = 6$.

23. إذا أعطى استخدام كثيرة حدود ماكلورين للدّالة e^x التقريب (2.5) لقيمة e، وتحدّد حد الخطأ في هذا التقريب بالقيمة $E = \frac{1}{6}$ فأوجد حدًّا للخطأ الناتج في E.

24. إن دالّة الخطأ المعرف بالصيغة $\text{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^x e^{-t^2}\,dt$

يعطي احتمالًا بأن أي واحدة من سلسلة التجارب ستقع ضمن x من وحدات المعدل؛ مفترضين أن للمحاولات توزيعًا طبيعيًّا بمعدل صفر، وانحرافًا معياريًّا $\sqrt{2}/2$. ولا يمكن تقييم هذا التكامل بدلالة دوال ابتدائية، لذا يتعيَّن استخدام أسلوب التقريب.

أ. اعمل تكامل سلسلة ماكلورين لـ e^{-x^2} لإثبات

$$\text{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)k!}$$

ب. يمكن التعبير عن دالّة الخطأ أيضًا بالصيغة

$$\text{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}e^{-x^2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{2^k x^{2k+1}}{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2k+1)}$$

تحقّق من أن السلسلتين تتفقان عند $k = 1, 2, 3, 4$ [إرشاد: استخدم سلسلة ماكلورين لـ e^{-x^2}].

ج. استخدم السلسلة في الفقرة (أ) لتقريب $\text{erf}(1)$ إلى 10^{-7}.

د. استخدم العدد نفسه من الحدود على صورة الفقرة (ج) لتقريب $\text{erf}(1)$ مع السلسلة في الفقرة (ب).

هـ. وضِّح سبب ظهور صعوبات عند استخدام السلسلة في الفقرة (ب) لتقريب $\text{erf}(x)$.

25. الدالة $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ تحقّق شرط لبشتز مع ثابت لبشتز L على الفترة $[a, b]$ إذا كان $|f(x) - f(y)| \le L|x - y|$ لكل $x, y \in [a, b]$.

أ. أثبت أنه إذا حقّق f شرط لبشتز مع ثابت لبشتز L على فترة ما $[a, b]$، فإن $f \in C[a, b]$.

ب. أثبت أنه إذا كان لـ f مشتقة محددة في L على $[a, b]$، فإن f يحقّق شرط لبشتز مع ثابت لبشتز L على الفترة $[a, b]$.

ج. أعط مثالًا لدالّة تكون متصلةً على فترة مغلقة، لكنه لا يحقّق شرط لبشتز على الفترة.

26. افترض $f \in C[a, b]$، حيث x_1 و x_2 ضمن $[a, b]$، وأن c_1 و c_2 ثابتان موجبان. أثبت وجود العدد ξ ما بين x_1 و x_2 مع

$$f(\xi) = \frac{c_1 f(x_1) + c_2 f(x_2)}{c_1 + c_2}$$

27. ليكن $f \in C[a, b]$، وليكن p في الفترة المفتوحة (a, b).

أ. افترض $f(p) \ne 0$. أثبت وجود $\delta > 0$ مع $f(x) \ne 0$ لكل x ضمن $[p - \delta, p + \delta]$ حيث إن $[p - \delta, p + \delta]$ جزئية من $[a, b]$.

ب. افترض $f(p) = 0$ و $k > 0$، أثبت وجود $\delta > 0$ مع $|f(x)| \le k$ لكل x في الفترة $[p - \delta, p + \delta]$ حيث إن $[p - \delta, p + \delta]$ جزئية من $[a, b]$.

2.1 تدوير الأخطاء والحساب بالحاسوب Round-off Error and Computer Arithmetic

إن الحساب الذي يتم باستخدام الآلة الحاسبة أو الحاسوب يختلف عن الحساب في مقررات الجبر والتفاضل والتكامل. ومن الممكن التوقع – بناءً على خبرتك السابقة – أن العبارات الآتية صحيحة دائمًا، مثل $2+2=4$, $4 .8=32$ و $(\sqrt{3})^2=3$، ففي الحساب العادي نتوقع نتائج صحيحة للعمليتين $2+2=4$ و $4 .8=32$، ولكن لا نحصل على النتيجة $(\sqrt{3})^2=3$ بدقة كاملة. ولكي نفهم لماذا يكون هذا الأمر صحيحًا، يتعين علينا أن نستكشف عالم الحساب ذا الخانات (أو المراتب) المنتهية.

توقع ظهور خطأ بسبب التقريب حيثما تكون الحسابات باستخدام أعداد ليست من قوى العدد 2. إن إبقاء هذا الخطأ تحت السيطرة أمر مهم جدًّا خصوصًا عندما يكون عدد الحسابات كبيرًا.

إننا نسمح في عالم الرياضيات التقليدية باستخدام أعداد ذوات خانات (أو مراتب) غير منتهية، فالحساب الذي نستخدمه في هذا العالم يُعرّف $\sqrt{3}$ على أنه ذلك العدد الموجب الوحيد الذي لو ضربته في نفسه لأنتج العدد 3. ولكن في العالم الحاسوبي، فإن كل عدد قابل للتمثيل يحوي عددًا ثابتًا ومنتهيًا من الأعداد. وهذا يعني على سبيل المثال أن الأعداد النسبية – وربما ليس جميعها – يمكن تمثيلها بدقة. وبما أن $\sqrt{3}$ عدد غير نسبي، فإنه يعطي تمثيلًا تقريبيًّا، ومن ثم لا يكون مربعه 3 تمامًا، مع أنه سيكون غالبًا قريبًا من 3 على نحو كافٍ بحيث يجعله مقبولًا في معظم الأحوال. وأخيرًا يكون هذا الحساب الآلي في معظم الأحيان مُرضيًا، ويمرّ من دون ملاحظة أو تحفظ، ولكن في بعض الأحيان تحدث مشكلات بسبب هذا الاختلاف.

إن الخطأ الناتج عند استخدام الآلة الحاسبة أو الحاسوب لإيجاد حسابات عددية حقيقية يُسمى خطأ (التقريب أو التدوير). ويحدث هذا الخطأ؛ لأن إجراء الحساب بالآلة يتضمن أعدادًا ذات عدد منتهٍ من الخانات، مما يؤدي إلى إجراء الحسابات باستخدام التمثيل التقريبي للأعداد. وفي الحاسوب العادي تستخدم مجموعة جزئية من الأعداد الحقيقية الصغيرة نسبيًّا لتمثيل جميع الأعداد الحقيقية، وتحتوي هذه المجموعة على الأعداد النسبية الموجبة والسالبة فقط، وتحتفظ بالجزء الكسري مع جزء أسي.

نشرت IEEE (معهد مهندسي الكهرباء والإلكترونيات) في عام 1985 تقريرًا بعنوان

Binary Floating Point Arithmetic Standard 754 - 1985

"معايير 1985– 754 للحساب باستخدام النقاط الثنائية العائمة" لقد صُمّمت النماذج لاستخدام الدقة المنفردة والثنائية والممتدة، وتُعتمد هذه المعايير على نحو عام من قبل صانعي الحواسيب الصغيرة التي تستخدم الأنظمة الثنائية. وعلى سبيل المثال ينفذ المعالج المساعد العددي للحواسيب الشخصية تمثيلًا من 64–بت (منزلة ثنائية) للعدد الحقيقي يسمى الحقيقي الطويل long real البت الأول هو دليل الإشارة، ويرمز له بـ s. حيث يُتبَعُ بأس من 11 بت، c، يسمى المميز characteristic، وجزء من 52 بت، f، يسمى الكسر العشري mantissa. والأساس للأس هو 2.

وبما أن 52 منزلة ثنائية تقابل ما بين 15 و 16 منزلة عشرية، يمكننا افتراض عدد ضمن هذا النظام ذي 15 منزلة عشرية من الدقة على الأقل. الأس ذو 11 منزلة ثنائية يعطي الأعداد

0 ولغاية $2^{11} - 1 = 2047$. وعلى أي حال فاستخدام الأعداد الصحيحة الموجبة فقط للأس لن يمثِّل الأعداد الصغيرة بدقة. ولضمان كون الأعداد الصغيرة متساوية التمثيل؛ فإن 1023 تطرح من المميز، فيكون مدى الأس في الواقع من 1023 – 1024.

ولحفظ ما خُزِّن وتوفير تمثيل وحيد لكل عدد ذي نقطة عائمة؛ تُفترض معيارية ما. ويعطي استخدام هذا النظام عددًا ذا نقطة عائمة بصيغة

$$(-1)^s 2^{c-1023}(1+f)$$

افترض على سبيل المثال عدد الحاسبة

0 10000000011 1011100100010000000000000000000000000000000000000000

إن أول بت من اليسار هو 0، الذي يعني أن العدد موجب، ثم إن 11 بت التالية 10000000011 تعطي المميز وهي مكافئة للعدد العشري

$$c = 1 \cdot 2^{10} + 0 \cdot 2^9 + \cdots + 0 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 = 1024 + 2 + 1 = 1027$$

إن الجزء الأسي من العدد يكون $2^{1027-1023} = 2^4$. وآخر 52 بت تصف كون العشري هو

$$f = 1 \cdot \left(\tfrac{1}{2}\right)^1 + 1 \cdot \left(\tfrac{1}{2}\right)^3 + 1 \cdot \left(\tfrac{1}{2}\right)^4 + 1 \cdot \left(\tfrac{1}{2}\right)^5 + 1 \cdot \left(\tfrac{1}{2}\right)^8 + 1 \cdot \left(\tfrac{1}{2}\right)^{12}$$

والنتيجة أن عدد الحاسبة هذا يمثل بكفاءة العدد العشري

$$(-1)^s 2^{c-1023}(1+f) = (-1)^0 \cdot 2^{1027-1023}\left(1 + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \frac{1}{256} + \frac{1}{4096}\right)\right)$$
$$= 27.56640625$$

على أي حال، أصغر عدد حاسبة تالٍ هو

0 10000000011 1011100100001111111111111111111111111111111111111111

وأكبر عدد حاسبة تالٍ هو

0 10000000011 1011100100010000000000000000000000000000000000000001

هذا يعني أن عدد الحاسبة الأصلي لا يمثل 27.56640625 فقط، وإنما يمثِّل نصف الأعداد الحقيقية أيضًا التي هي ما بين 27.56640625 وأقرب عددي حاسبة مجاورين. ولكي نكون دقيقين؛ فإنه يمثِّل أي عدد حقيقي في الفترة

[27.5664062499999982236431605997495353221893310546875

27.5664062500000017763568394002504646778106689453125)

إن أصغر عدد موجب معياري يمكن تمثيله، له $s = 0, c = 1$ وهو مكافئ لـ $f = 0$

$$2^{-1022} \cdot (1+0) \approx 0.2225 \times 10^{-307}$$

وإن أكبر عدد، له $s = 0, c = 2046$ وهو مكافئ لـ $f = 1 - 2^{-52}$

$$2^{1023} \cdot (2 - 2^{-52}) \approx 0.17977 \times 10^{309}$$

الأعداد التي تظهر في الحسابات، ولها قيمة تقل عن $2^{-1022} \cdot (1+0)$ تنتج نقصًا، وعادة ما تتجه قيمتها إلى الصفر. أمّا الأعداد التي قيمتها أكبر من $2^{1023} \cdot (2 - 2^{-52})$ تنتج زيادة، وعادة ما تؤول بالحسابات إلى أن تقف (ما لم يعطى البرنامج أوامر لاكتشاف ذلك). كما يجب

ملاحظة وجود تمثيلين للعدد صفر إحداهما صفر موجب عندما $s = 0$, $c = 0$ و $f = 0$، وقيمة سالبة للصفر عندما $s = 1$, $c = 0$ و $f = 0$.

إن استخدام الأعداد الثنائية يميل إلى إخفاء الصعوبات الحسابية التي تنتج عن استخدام مجموعة منتهية من الأعداد الآتية لتمثيل جميع الأعداد الحقيقية.

ولاختبار هذه المسائل سنفترض – من أجل التسهيل – أن الأعداد الآتية تمثل بالطريقة المعيارية للنقطة العائمة العشرية على الصورة

$$\pm 0.d_1 d_2 \ldots d_k \times 10^n \text{ ، } 1 \le d_1 \le 9 \text{ و } 0 \le d_i \le 9$$

إن الخطأ الناتج عن استخدام التمثيل بالنقطة العائمة بدلاً من العدد نفسه يسمى خطأ التدوير، سواءً أكان التمثيل يستخدم القطع أم التدوير.

لكل $i = 2, \ldots, k$ نسمي النقاط الممثّلة بهذا الشكل k-digit أعدادًا آلية عشرية ذات k من الخانات. إن أي عدد حقيقي موجب ضمن المدى العددي للآلة يمكن أن يمثّل معياريًّا على الصورة

$$y = 0.d_1 d_2 \ldots d_k d_{k+1} d_{k+2} \ldots \times 10^n$$

ونحصل على تمثيل y على صورة النقطة العائمة، ويعبّر عنها بالرمز $fl\,(y)$ عن طريق قطع خانات تمثيل y عند المنزلة k، هناك طريقتان لتنفيذ هذا القطع:

- تسمّى إحدى الطريقتين القطعَ Chopping، وتنفّذ بقطع الخانات $d_{k+1} d_{k+2} \ldots$ وتنتج هذه الطريقة

$$fl\,(y) = 0.d_1 d_2 \ldots d_k \times 10^n$$

- وتسمّى الطريقة الثانية التقريبَ rounding، وتنفّذ بإضافة $5 \times 10^{n-(k+1)}$ إلى y، ثم تقطع النتيجة لنحصل على عدد في الصورة

$$fl\,(y) = 0.\delta_1 \delta_2 \ldots \delta_k \times 10^n$$

ولذلك عند التقريب إذا كان $d_{k+1} \ge 5$ نضيف 1 إلى d_k لنحصل على $fl\,(y)$، أي أننا ندوّر (نقرّب) إلى أعلى، وعندما يكون $d_{k+1} < 5$، فإننا نقطع الخانات جميعها بعد المنزلة d_k، أي أننا ندوّر إلى أسفل. وأخيرًا إذا كان التقريب إلى أسفل فإن $\delta_i = d_i$ لكل $i = 1, 2, \ldots, k$.

وعلى كل حال إذا كان التقريب إلى أعلى فإن الخانات (وحتى الأسّ) يمكن أن تتغير.

مثال 1

إن للعدد π تمثيلاً عشريًّا على الصورة $\pi = 3.14159265\ldots$ وعند كتابته على الصورة العشرية المعيارية يكون لدينا $\pi = 0.314159265\ldots \times 10^1$، إن كتابة π على صورة النقطة العائمة مستخدمًا القطع عند المنزلة الخامسة يكون

$$fl\,(\pi) = 0.31415 \times 10^1 = 3.1415$$

يُعدّ الخطأ النسبي عمومًا مقياسًا للدقة أفضل من الخطأ المطلق، لأن الأول يأخذ في الحسبان حجم العدد المقرّب.

وبالنظر إلى المنزلة السادسة في التمثيل العشري للعدد π نجد أنها 9، ولذلك يكون تمثيل π بالنقطة العائمة مستخدمًا تدوير المنزلة الخامسة هو

$$fl\,(\pi) = (0.31415 + 0.00001) \times 10^1 = 3.1416$$ ■

ويصف التعريف الآتي طريقتين لقياس أخطاء التقريب.

تعريف 15.1

إذا كان P^* تقريبًا إلى P، فإن الخطأ المطلق يكون $|P-P^*|$، والخطأ النسبي هو $|P-P^*|/|P|$، على أن $P \ne 0$. ■

مثال 2

احسب الخطأ المطلق والخطأ النسبي في المثال الآتي:

أ. ليكن $P = 0.3000 \times 10^1$، $P^* = 0.3100 \times 10^1$؛ فإن الخطأ المطلق يساوي 0.1، والخطأ النسبي يساوي $0.333\overline{3} \times 10^{-1}$.

ب. ليكن $P = 0.3000 \times 10^{-3}$ و $P^* = 0.3100 \times 10^{-3}$؛ فإن الخطأ المطلق يكون 0.1×10^{-4}، والخطأ النسبي يكون $0.333\overline{3} \times 10^{-1}$.

ج. ليكن $P = 0.3000 \times 10^4$ و $P^* = 0.3100 \times 10^4$؛ فإن الخطأ المطلق يكون 0.1×10^3، والخطأ النسبي مرة ثانية يكون $0.333\overline{3} \times 10^{-1}$.

يُظهر هذا المثال أن الخطأ النسبي نفسه $0.333\overline{3} \times 10^{-1}$ يحدث مقابل أخطاء مطلقة متعددة. وبوصفه مقياسًا للدقة، فإن الخطأ المطلق يمكن أن يكون مضلِّلًا، ويكون الخطأ النسبي ذا معنًى أفضل؛ لأن الخطأ النسبي يأخذ حجم القيمة في الحسبان. ■

لا نستطيع إيجاد قيمة صحيحة للخطأ الحقيقي الناتج عن التقريب في كثير من الأحيان، وبدلًا من ذلك نجد حدًّا للخطأ، وهو الذي يعطينا قيمة الخطأ الأسوأ.

يستخدم التعريف الآتي الخطأ النسبي ليعطي مقياسًا لأرقام دقة التقريب المعنوية.

تعريف 16.1

يقال: إن العدد P^* يكون تقريبًا للعدد P بأرقام معنوية عددها t، إذا كان t أكبر عدد صحيح غير سالب يكون لدينا

$$\frac{|P-P^*|}{|P|} \leq 5 \times 10^{-t}$$

■

إن هذا التعريف أدق ويعطي مفهومًا متصلًا.

يُستخدم مصطلح الأرقام المعنوية لوصف عدد الخانات العشرية التي يظهر أنها صحيحة على نحو واسع.

يوضح الجدول (1.1) وباستخدام قيم متعددة للعدد P الطبيعة المتصلة للأرقام المعنوية عن طريق تسجيل أصغر حد أعلى لقيمة $|P-P^*|$، ويعبّر عنها بالرمز $\max|P-P^*|$، عندما تتوافق P^* مع P لأربعة أرقام معنوية.

جدول 1.1

P	0.1	0.5	100	1000	5000	9990	10000
$\max\|P-P^*\|$	0.00005	0.00025	0.05	0.5	2.5	4.995	5

وبالرجوع إلى التمثيل الآلي للأعداد، نجد أن التمثيل بالنقطة العائمة $fl(y)$ للعدد y يكون له الخطأ النسبي

$$\left|\frac{y - fl(y)}{y}\right|$$

إذا استخدم k من الخانات العشرية وطريقة القطع للتمثيل الآلي للعدد

$$y = 0.d_1d_2\ldots d_kd_{k+1}\ldots \times 10^n$$

فإن

$$\left|\frac{y - fl(y)}{y}\right| = \left|\frac{0.d_1d_2\ldots d_kd_{k+1}\ldots \times 10^n - 0.d_1d_2\ldots d_k \times 10^n}{0.d_1d_2\ldots \times 10^n}\right|$$

$$= \left|\frac{0.d_{k+1}d_{k+2}\ldots \times 10^{n-k}}{0.d_1d_2\ldots \times 10^n}\right| = \left|\frac{0.d_{k+1}d_{k+2}\ldots}{0.d_1d_2\ldots}\right| \times 10^{-k}$$

وبما أن $d_1 \neq 0$، فإن أصغر قيمة للمقام تساوي 0.1، الحد الأعلى للبسط هو 1، وعليه يكون

$$\left|\frac{y - fl(y)}{y}\right| \leq \frac{1}{0.1} \times 10^{-k} = 10^{-k+1}$$

إن حد الخطأ النسبي باستخدام الحساب التقريبي ذي k من الخانات هو $0.5 \times 10^{-k+1}$ بطريقة مماثلة. (انظر التمرين 24).

لاحظ أن حدود الخطأ النسبي باستخدام الحساب ذي k من الخانات تكون مستقلة عن العدد الذي تمثّلهُ. وتعود هذه النتيجة إلى الطريقة التي تتوّزع بها الأعداد الآلية على طول الخط الحقيقي. إن العدد نفسه من الأعداد الآلية العشرية يستخدم لتمثيل الفترات $[0.1, 1]$،$[1, 10]$ $[10, 100]$؛ بسبب صيغة المؤشر الأسيّة، إن عدد الأعداد الآلية العشرية في الفترة $[10^n, 10^{n+1}]$ ثابت للأعداد الصحيحة جميعها n ضمن حدود الآلة.

بالإضافة إلى التمثيل غير الصحيح للأعداد، فإن الحساب المنفّذ في الحاسوب غير دقيق. وهو ينطوي – في الحساب – على التعامل بالأعداد الثنائية بعمليات سحب أو بعمليات منطقية متعددة. وبما أن الميكانيكيات الفعلية لهذه العمليات لا علاقة لها بهذا التمثيل، فإننا سننشئ تقريب الحساب بالحاسوب الخاص بنا، وعلى الرغم من أن الحساب الذي ننشئه لا يعطي الصورة الصحيحة، إلا أنه يكفي لشرح المشكلات التي تظهر.

ليكن $fl(y)$، $fl(x)$ التمثيل بالنقطة العائمة لكل من الأعداد الحقيقية x، y، وأن الرموز $\oplus, \ominus, \otimes, \oplus$ تمثّل عمليات الآلة للجمع، والطرح، والضرب، والقسمة على التوالي. وسنفترض حسابًا مبنيًّا على عدد محدود من الخانات معرّفًا كالآتي:

$$x \oplus y = fl(fl(x) + fl(y)), \qquad x \otimes y = fl(fl(x) \times fl(y))$$

$$x \ominus y = fl(fl(x) - fl(y)), \qquad x \oplus y = fl(fl(x) \div fl(y))$$

إن هذا الحساب يتطابق مع استخدام الحساب العادي للتمثيل بالنقطة العائمة للعددين x، y ثم تحويل النتيجة الصحيحة لتمثيلها بطريقة "النقطة العائمة ذات العدد المحدود من الخانات".

إن حساب التقريب قابل للاستخدام في CAS. وإن أمر مابل Maple

```
>Digits:=t;
```

يؤدي إلى تدوير الحساب جميعه إلى t من الخانات. فعلى سبيل المثال توجد قيمة $fl(fl(x)+fl(y))$ باستخدام التقريب بعدد t من الخانات عن طريق الأمر

```
>evalf(evalf(x)+evalf(y));
```

إن استخدام الحساب ذي t من الخانات بطريقة القطع أكثر صعوبة، ويتطلب خطوات متتالية أو طريقة. ويبحث تمرين (27) هذه المسألة.

مثال 3 ليكن $x = \frac{5}{7}, y = \frac{1}{3}$ وأن طريقة القطع ذات الخانات الخمس هي المستخدمة في الحسابات المشتملة على x ، y. ويعطي الجدول (2.1) قيم العمليات شبه الحاسوبية على $fl(x) = 0.71428 \times 10^0$ $.fl(y) = 0.33333 \times 10^0$ ■

وبما أن أعلى قيمة للخطأ النسبي للعمليات في المثال (3) هي 0.267×10^{-4}، فإن الحساب يعطي نتائج مقبولة ذات 5 خانات. على كل حال افترض أن لدينا $u = 0.714251$، $v = 98765.9$ و $w = 0.111111 \times 10^{-4}$ وأخيرًا يكون $fl(u) = 0.71425 \times 10^0$ ، $fl(v) = 0.98765 \times 10^5$ $.fl(w) = 0.11111 \times 10^{-4}$

جدول 2.1

العملية	النتيجة	القيمة الفعلية	الخطأ المطلق	الخطأ النسبي
$x \oplus y$	0.10476×10^1	22/21	0.190×10^{-4}	0.182×10^{-4}
$x \ominus y$	0.38095×10^0	8/21	0.238×10^{-5}	0.625×10^{-5}
$x \otimes y$	0.23809×10^0	5/21	0.524×10^{-5}	0.220×10^{-4}
$x \oplus y$	0.21428×10^1	15/7	0.571×10^{-4}	0.267×10^{-4}

(لقد اختيرت هذه الأعداد لتوضيح بعض المشكلات التي يمكن أن تظهر في الحساب ذي الخانات المنتهية.)

نجد أن $x \ominus u$ تعطي خطأً مطلقًا صغيرًا في جدول (3.1)، ولكنها تعطي خطأً نسبيًّا كبيرًا. إن القسمة على عدد صغير w أو الضرب في العدد الكبير v يكبر الخطأ المطلق دون تعديل الخطأ النسبي. وإن جمع الأعداد الصغيرة والكبيرة u و v يعطي خطأً مطلقًا كبيرًا؛ ولكن ليس خطأً نسبيًّا كبيرًا.

جدول 3.1

العملية	النتيجة	القيمة الفعلية	الخطأ المطلق	الخطأ النسبي
$x \ominus u$	0.30000×10^{-4}	0.34714×10^{-4}	0.471×10^{-5}	0.136
$(x \ominus u) \oplus w$	0.27000×10^1	0.31243×10^1	0.424	0.136
$(x \ominus u) \otimes v$	0.29629×10^1	0.34285×10^1	0.465	0.136
$u \otimes v$	0.98765×10^5	0.98766×10^5	0.161×10^1	0.163×10^{-4}

إن واحدًا من أكثر الحسابات التي تنتج خطأً هو الحساب الذي يتعامل مع حذف الأعداد المعنوية عند طرح أعداد متساوية تقريبًا. افترض أن عددين متساويان تقريبًا x، y حيث $x > y$ وافترض أن تمثيلهما باستخدام k من الخانات هو

$$fl(x) = 0.d_1d_2 \ldots d_p\alpha_{p+1}\alpha_{p+2} \ldots \alpha_k \times 10^n$$

و

$$fl(y) = 0.d_1d_2 \ldots d_p\beta_{p+1}\beta_{p+2} \ldots \beta_k \times 10^n$$

إن شكل النقطة العائمة للمقدار $x - y$ هو

$$fl(fl(x) - fl(y)) = 0.\sigma_{p+1}\sigma_{p+2} \ldots \sigma_k \times 10^{n-p}$$

حيث إن

$$0.\sigma_{p+1}\sigma_{p+2} \ldots \sigma_k = 0.\alpha_{p+1}\alpha_{p+2} \ldots \alpha_k - 0.\beta_{p+1}\beta_{p+2} \ldots \beta_k$$

إن العدد بصيغة النقطة العائمة المستخدم لتمثيل $x - y$ يحوي $k - p$ عددًا معنويًّا على الأكثر. على كل حال وفي معظم آلات الحساب، فإن $x - y$ يعطي عدد k عددًا معنويًّا تاركًا الأعداد الأخيرة التي عددها p إما أصفارًا وإما محددة عشوائيًّا، إن أي حسابات إضافية للمقدار $x - y$ تسترجع مسألة الحفاظ على $k - p$ من الأعداد المعنوية؛ لأن أي سلسلة من الحسابات لا تكون أدق من الحلقة الأضعف فيها.

إذا أنتج حساب أو تمثيل ذو عدد منتهٍ من الأعداد خطأً، فإن هذا الخطأ يكبر عند القسمة على عدد صغير (أو على نحو مكافئ عند الضرب في عدد كبير). افترض على سبيل المثال أن

للعـــدد z التقريب $z+\delta$ ذا العـــدد المحدود من الأعداد، حيث حصلنا على الخطأ δ عن طريق التمثيل أو عن طريق حساب سابق.

الآن إذا قسمنا على $\varepsilon = 10^{-n}$، حيث $n > 0$ فإن

$$\frac{z}{\varepsilon} \approx fl\left(\frac{fl(z)}{fl(\varepsilon)}\right) = (z+\delta)\times 10^n$$

وهكـــذا فإن الخطأ المطلق في هذا التقريب $|\delta| \times 10^n$ هو الخطأ المطلق الأصلي $|\delta|$، مضروبًا في العدد 10^n.

مثال 4 ليكـــن $p = 0.54617$ و $q = 0.54601$، فـــإن القيمـــة الصحيحـــة كحاصـــل طـــرح $p - q$ هي $r = 0.00016$. افتـــرض أن عمليـــة الطـــرح قد أُجريت باســـتخدام الحســـاب بأربع خانات، وأن تدويـــر p و q لأربـــع خانات يعطينا $p^* = 0.5462$، $q^* = 0.5460$ علـــى التوالي ويعطينا $r^* = p^* - q^* = 0.0002$ بوصفه تقريبًا للعدد r باستخدام أربع خانات.

وبما أن

$$\frac{|r - r^*|}{|r|} = \frac{|0.00016 - 0.0002|}{|0.00016|} = 0.25$$

فـــإن النتيجة تحمـــل عددًا معنويًّا واحـــدًا، حيث كانت p^*, q^* صحيحة لأربعـــة أرقام معنوية ولخمسة أرقام معنوية على التوالي.

إذا اســـتخدمت طريقة القطع للحصول على أربـــع خانات، فإن التقريب لأربع خانات للأعداد p، q، r هو $p^* = 0.5461$، $q^* = 0.5460$، $r^* = p^* - q^* = 0.0001$ وهذا يعطينا

$$\frac{|r - r^*|}{|r|} = \frac{|0.00016 - 0.0001|}{|0.00016|} = 0.375$$

والذي ينتج دقة ذات عدد معنوي واحد. ■

ومن الممكن تجنب خطأ التقريب عن طريق تكرار صياغة المسألة كما هو موضح في المثال الآتي:

مثال 5 ينص قانون الصيغة التربيعية على أن جذري $ax^2 + bx + c = 0$ عندما $a \neq 0$ هما

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad \text{و} \quad x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \tag{1.1}$$

إن جـــذري المـــعادلـــة التربيعية العامـــة x_1 و x_2 يرتبطـــان مـــع المعاملات بحسب المعادلات الآتية $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$ و $x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$ إن هذه حالـــة خاصة من معادلات فـايـتـيـــه Viète's formulas لـمعاملات كثيرات الحدود.

طبّق القانون على الصيغة $x^2 + 62.10x + 1 = 0$ التي يكون جذراها المقرّبان (مســـتخدمًا حســـاب التقريب لأربع خانات) هما $x_1 = -0.01610723$، $x_2 = -62.08390$. في هذه الصيغة، b^2 أكبر بكثير من $4ac$، عندئذ فإن البسط في حساب x_1 يتضمن طرح عددين متساويين تقريبًا.

بما أن

$$\sqrt{b^2 - 4ac} = \sqrt{(62.10)^2 - (4.000)(1.000)(1.000)}$$
$$= \sqrt{3856. - 4.000} = \sqrt{3852.} = 62.06$$

ونحصل على

$$fl(x_1) = \frac{-62.10 + 62.06}{2.000} = \frac{-0.04000}{2.000} = -0.02000$$

وهو تقريب ضعيف للقيمة $x_1 = -0.01611$ بخطأ نسبي كبير

$$\frac{|-0.01611 + 0.02000|}{|-0.01611|} \approx 2.4 \times 10^{-1}$$

ومن جهة أخرى فإن حساب x_2 يتضمن جمع عددين متساويين تقريبًا هما $-b$ و $-\sqrt{b^2 - 4ac}$ وهذا لا يشكل أي مشكلة ؛ لأن

$$fl\,(x_2) = \frac{-62.10 - 62.06}{2.000} = \frac{-124.2}{2.000} = -62.10$$

يُنْتج الخطأ النسبي الصغير

$$\frac{|-62.08 + 62.10|}{|-62.08|} \approx 3.2 \times 10^{-4}$$

نغيّر قانون الصيغة التربيعية عن طريق جعل البسط عددًا نسبيًّا (بالضرب في المرافق) للحصول على تقريب أدق للعدد x_1 باستخدام التقريب ذي الأربع خانات، فيصبح

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\left(\frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}\right) = \frac{b^2 - (b^2 - 4ac)}{2a(-b - \sqrt{b^2 - 4ac})}$$

وبالتبسيط، نحصل على الصيغة التربيعية البديلة

$$x_1 = \frac{-2c}{b + \sqrt{b^2 - 4ac}} \qquad (2.1)$$

باستخدام (2.1) نحصل على

$$fl\,(x_1) = \frac{-2.000}{62.10 + 62.06} = \frac{-2.000}{124.2} = -0.01610$$

الذي يحمل الخطأ النسبي الصغير 6.2×10^{-4} ■

يمكن تطبيق طريقة الضرب في المرافق لنحصل على الصيغة التربيعية البديلة للعدد x_2

$$x_2 = \frac{-2c}{b - \sqrt{b^2 - 4ac}} \qquad (3.1)$$

تستخدم هذه الصيغة إذا كان b عددًا سالبًا. على كل حال، لا يؤدي الاستخدام الخطأ للصيغة x_2 في المثال (5) إلى طرح عددين متساويين تقريبًا فقط، بل يؤدي أيضًا إلى القسمة على ناتج الطرح الصغير. إن عدم الدقة الناتج عن هذا التركيب يعطينا

$$fl\,(x_2) = \frac{-2c}{b - \sqrt{b^2 - 4ac}} = \frac{-2.000}{62.10 - 62.06} = \frac{-2.000}{0.04000} = -50.00$$

بخطأ نسبيّ كبير هو 1.9×10^{-1}. ■

ويمكن تقليل عدم الدقة الناتجة عن خطأ التقريب عن طريق إعادة ترتيب العمليات الحسابية وهذا ما يوضحه المثال الآتي.

مثال 6

أوجد قيمة $f(x) = x^3 - 6.1x^2 + 3.2x + 1.5$ عند $x = 4.71$ مستخدمًا حساب الخانات الثلاث. يعطي جدول (4.1) النتائج الوسيطة في الحسابات. تحقّق من صحة هذه النتائج؛ للتأكد من أن فهمك للحساب بثلاث خانات صحيح. تذكر أن طريقة القطع لثلاث خانات تعطي بسهولة القيم الثلاث للخانات الثلاث الأولى من اليسار ودون أي تدوير، وتختلف جذريًّا عن القيم التي تحصل عليها بطريقة التقريب لثلاث خانات.

جدول 1.4

	x	x^2	x^3	$6.1x^2$	$3.2x$
المضبوط	4.71	22.1841	104.487111	135.32301	15.072
(القطع) ذو ثلاث منازل	4.71	22.1	104.	134.	15.0
(التدوير) ذو ثلاث منازل	4.71	22.2	105.	135.	15.1

تذكر وجوب إجراء القطع (أو التدوير) بعد كل عملية حساب.

ننظر إلى الحسابات التي قمنا بها لإيجاد قيمة x^3 باستخدام التقريب لثلاث خانات. ولتوضيح ذلك؛ نجد أولًا $x^2 = 4.71^2 = 22.1841$ وندوّرها إلى العدد 22.2 مستخدمين بعد ذلك قيمة x_2 هذه لإيجاد $x^3 = x^3 \cdot x = 22.2 \cdot 4.71 = 104.562$، وندور هذه القيمة إلى 105.

أما الحساب الدقيق (دون قطع أو تدوير) فهو

$$f(4.71) = 104.487111 - 135.32301 + 15.072 + 1.5$$

$$= -14.263899$$

يكون باستخدام قطع الخانات الثلاث $f(4.71) = ((104. - 134.) + 15.0) + 1.5 = -13.5$

ويكون باستخدام التقريب لثلاث خانات $f(4.71) = ((105. - 135.) + 15.1) + 1.5 = -13.4$

وتكون الأخطاء النسبية لطريقتي الخانات الثلاث أعلاه على التوالي:

$$\left|\frac{-14.263899 + 13.5}{-14.263899}\right| \approx 0.05 \quad \text{و} \quad \left|\frac{-14.263899 + 13.4}{-14.263899}\right| \approx 0.06$$

(القطع) for chopping — (التدوير) for rounding

توجد طريقة بديلة بكتابة $f(x)$ باستخدام الأقواس المتداخلة (nested) كما يأتي

$$f(x) = x^3 - 6.1x^2 + 3.2x + 1.5 = ((x - 6.1)x + 3.2)x + 1.5$$

وهذا يعطي طريقة القطع لثلاث خانات

$$f(4.71) = ((4.71 - 6.1)4.71 + 3.2)4.71 + 1.5 = -14.2$$

وتعطي طريقة التقريب لثلاث خانات ‎-14.3، والأخطاء النسبية الجديدة تكون

القطع لثلاث خانات

$$\left|\frac{-14.263899 + 14.2}{-14.263899}\right| \approx 0.0045$$

التقريب لثلاث خانات

$$\left|\frac{-14.263899 + 14.3}{-14.263899}\right| \approx 0.0025$$

إن استخدام الأقواس المتداخلة قد خفّض الخطأ النسبي للتقريب بالقطع إلى أقل من 10% مما

حصلنا عليه في الأصل. أما في حالة التقريب بالتدوير فقد كان التحسين أكثر ظهورًا، حيث حدث في المثال السابق أن انخفض الخطأ إلى أكثر من 95%. ■

يجب التعبير دائمًا عن كثيرات الحدود باستخدام الأقواس المتداخلة (nested) قبل إجراء الحسابات؛ لأن هذه الصيغة تجعل عدد العمليات الحسابية أقل ما يمكن.

إن تقليل الخطأ في مثال (6) كان بسبب تقليل العمليات الحسابية من أربع عمليات ضرب وثلاث عمليات جمع إلى عمليتي ضرب وثلاث عمليات جمع. وإن إحدى طرائق تقليل خطأ التقريب تكون بتقليل عدد العمليات الحسابية التي تنتج الخطأ.

مجموعة التمارين 2.1 EXERCISE SET

1. احسب الخطأ المطلق والخطأ النسبي الناتج عن تقريب p بالقيمة p^*:

أ. $p = \pi,\ p^* = 22/7$ ب. $p = \pi,\ p^* = 3.1416$ ج. $p = e,\ p^* = 2.718$

د. $p = \sqrt{2},\ p^* = 1.414$ هـ. $p = e^{10},\ p^* = 22000$ و. $p = 10^{\pi},\ p^* = 1400$

ز. $p = 8!,\ p^* = 39900$ ح. $p = 9!,\ p^* = \sqrt{18\pi}(9/e)^9$

2. أوجد أكبر فترة تقع فيها p^* لكي تقرّب p بخطأ نسبي حده الأعلى 10^{-4} لكل قيمة من قيم p:

أ. π ب. e ج. $\sqrt{2}$ د. $\sqrt[3]{7}$

3. افترض أن p^* يجب أن تقرّب p بخطأ نسبي حدُّه الأعلى 10^{-3}. أوجد أكبر فترة يجب أن تقع فيها p^* لكل قيمة p فيما يأتي:

أ. 150 ب. 900 ج. 1500 د. 90

4. أجرِ العمليات الحسابية الآتية:

(i) بصورة دقيقة.

(ii) مستخدمًا القطع لثلاث خانات.

(iii) مستخدمًا التقريب لثلاث خانات.

(iv) احسب الأخطاء النسبية في (ii) و (iii).

أ. $\frac{4}{5} + \frac{1}{3}$ ب. $\frac{4}{5} \cdot \frac{1}{3}$ ج. $\left(\frac{1}{3} - \frac{3}{11}\right) + \frac{3}{20}$ د. $\left(\frac{1}{3} + \frac{3}{11}\right) - \frac{3}{20}$

5. مستخدمًا حساب التقريب لثلاث خانات لإجراء الحسابات الآتية؛ احسب الخطأ المطلق والخطأ النسبي مستخدمًا خمس خانات على الأقل لإيجاد القيمة الصحيحة:

أ. $133 + 0.921$ ب. $133 - 0.499$ ج. $(121 - 0.327) - 119$

د. $(121 - 119) - 0.327$ هـ. $\dfrac{\frac{13}{14} - \frac{6}{7}}{2e - 5.4}$ و. $-10\pi + 6e - \frac{3}{62}$

ز. $\left(\frac{2}{9}\right) \cdot \left(\frac{9}{7}\right)$ ح. $\dfrac{\pi - \frac{22}{7}}{\frac{1}{17}}$

6. أعد حل تمرين (5) مستخدمًا حساب التقريب لأربع خانات.

7. أعد حل تمرين (5) مستخدمًا حساب القطع لثلاث خانات.

8. أعد حل تمرين (5) مستخدمًا حساب القطع لأربع خانات.

9. إن أول ثلاثة حدود غير صفرية لسلسلة ماكلورين للدّالة arctangent هي $x - (1/3)x^3 + (1/5)x^5$ احسب الخطأ المطلق والخطأ النسبي في التقريبات الآتية للعدد π مستخدمًا كثيرة الحدود بدلًا من arctangent:

أ. $4\left[\arctan\left(\frac{1}{2}\right) + \arctan\left(\frac{1}{3}\right)\right]$ ب. $16\arctan\left(\frac{1}{5}\right) - 4\arctan\left(\frac{1}{239}\right)$

10. يمكن تعريف العدد e بالقيمة $e = \sum_{n=0}^{\infty}(1/n!)$، احسب الخطأ المطلق والخطأ النسبي عند استخدام التقريبات الآتية للعدد e:

أ. $\sum_{n=0}^{5}\frac{1}{n!}$ ب. $\sum_{n=0}^{10}\frac{1}{n!}$

11. ليكن $f(x) = \dfrac{x\cos x - \sin x}{x - \sin x}$

أ. أوجد: $\lim_{x\to 0} f(x)$

ب. استخدم حساب التقريب لأربع خانات لإيجاد قيمة $f(0.1)$.

جـ. عوّض عن كل دالّة مثلية مستخدمًا كثيرة حدود ماكلورين الثالثة التي تمثِّلها، أوجد القيمة في (ب).

د. إن القيمة الفعلية هي $f(0.1) = -1.99899998$، أوجد الأخطاء النسبية للإجابات في (ب)، (ج).

12. ليكن $f(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{x}$

أ. أوجد: $\lim_{x\to 0}(e^x - e^{-x})/x$.

ب. استخدم حساب التقريب لأربع خانات لإيجاد قيمة $f(0.1)$.

جـ. عوّض عن كل دالّة مثلية مستخدمًا كثيرة حدود ماكلورين الثالثة التي تمثِّلها، أوجد القيمة في (ب).

د. إن القيمة الفعلية هي $f(0.1) = 2.003335000$، أوجد الأخطاء النسبية للإجابات في (ب)، (ج).

13. استخدم حساب التقريب لأربع خانات وصيغ مثال (5) لإيجاد التقريبات الأكثر دقّة لجذور الصيغ التربيعية الآتية، واحسب الأخطاء المطلقة والأخطاء النسبية

أ. $\frac{1}{3}x^2 - \frac{123}{4}x + \frac{1}{6} = 0$ ب. $\frac{1}{3}x^2 + \frac{123}{4}x - \frac{1}{6} = 0$

ج. $1.002x^2 - 11.01x + 0.01265 = 0$ د. $1.002x^2 + 11.01x + 0.01265 = 0$

14. أعد حل التمرين (13) باستخدام حساب القطع لأربع خانات.

15. استخدم النموذج الحقيقي بطول 64-bit لتجد الكسر العشري المكافئ للأعداد الآلية بالنقطة المتحركة

أ. 0 10000001010 1001001100000000000000000000000000000000000000000000

ب. 1 10000001010 1001001100000000000000000000000000000000000000000000

ج. 0 01111111111 0101001100000000000000000000000000000000000000000000

د. 0 01111111111 0101001100000000000000000000000000000000000000000001

16. أوجد العدد الأكبر الآتي والعدد الأصغر السابق لكل عدد آلي في التمرين (15)، مستخدمًا الصيغة العشرية (كسور عشرية).

17. لتكن النقطتان (x_0, y_0) و (x_1, y_1) على خط مستقيم و $y_1 \neq y_0$. يوجد معادلتان لإيجاد قاطع x على الخط هما

$$x = x_0 - \frac{(x_1 - x_0)y_0}{y_1 - y_0} \quad \text{و} \quad x = \frac{x_0 y_1 - x_1 y_0}{y_1 - y_0}$$

أ. برهن على صحة هاتين المعادلتين جبريًّا.

ب. استخدم البيانات $(x_0, y_0) = (1.31, 3.24)$، $(x_1, y_1) = (1.93, 4.76)$، وحساب التقريب لثلاث خانات، لتجد قاطع x بالطريقتين. أي الطريقتين أفضل؟ ولماذا؟

18. كثيرة حدود تايلور من الرتبة n للدّالة $f(x) = e^x$ هي $\sum_{i=0}^{n}(x^i/i!)$. استخدم كثيرة حدود تايلور من الرتبة

التاسعة، وحساب القطع لثلاث خانات لتجد تقريبًا للعدد e^{-5} مستخدمًا كلاً من الطرائق الآتية:

أ. $e^{-5} \approx \sum_{i=0}^{9} \frac{(-5)^i}{i!} = \sum_{i=0}^{9} \frac{(-1)^i 5^i}{i!}$

ب. $e^{-5} = \frac{1}{e^5} \approx \frac{1}{\sum_{i=0}^{9} \frac{5^i}{i!}}$

ج. إن القيمة التقريبية الصحيحة لأقرب ثلاث خانات للعدد e^{-5} هي 6.74×10^{-3}. أي المعادلتين في (أ)، (ب) أدق؟ ولماذا؟

19. ليكن $ax + by = e$ و $cx + dy = f$ نظام معادلتين خطيتين، حيث قيم a, b, c, d, e, f معطاة. ويمكن حلهما لقيم x، y بالطريقة التالية:

افترض $m = \frac{c}{a}$ حيث $a \neq 0$.

$$d_1 = d - mb$$

$$f_1 = f - me$$

$$y = \frac{f_1}{d_1}$$

$$x = \frac{e - by}{a}$$

وحُلَّ نظام المعادلتين الخطيتين في لكل مما يلي مقربًا الجواب لأربع مراتب:

أ. $1.130x - 6.990y = 14.20$
$1.013x - 6.099y = 14.22$

ب. $8.110x + 12.20y = -0.1370$
$-18.11x + 112.2y = -0.1376$

20. كرّر التمرين (19) مستخدمًا حساب القطع ذي الأربع خانات.

21. أ. بيّن أن أسلوب تداخل كثيرة الحدود الموضحة في مثال (6) يمكن تطبيقه أيضًا في حساب $f(x) = 1.01e^{4x} - 4.62e^{3x} - 3.11e^{2x} + 12.2e^{x} - 1.99$.

ب. استخدم تقريب الجواب لثلاث خانات، افترض كون $e^{1.53} = 4.62$، وأن $e^{nx} = (e^x)^n$ لتقييم $f(1.53)$ وحسبما هو معطى في (أ).

ج. أعد الحسابات في (ب)، من خلال عمل تداخل الحسابات أولاً.

د. قارن التقريبات في (ج) بنتيجة التقريب لثلاث خانات صحيحة $f(1.53) = -7.61$.

22. لدينا متوازي سطوح مستطيلة أطوال جوانبه 3 cm، 4 cm، و 5 cm مقيسة إلى أقرب سنتمتر. ما أفضل حد علوي وحد سفلي لحجم هذا المتوازي؟ وما أفضل حد علوي وحد سفلي للمساحة السطحية؟

23. لتكن $P_n(x)$ كثيرة حدود ماكلورين من الرتبة n لدالّة معكوس الظل. استخدم Maple محمّلاً 75 مرتبة عشرية لإيجاد قيمة n اللازمة لتقريب π ضمن 10^{-25} مستخدمًا الصيغ الآتية:

أ. $4\left[P_n\left(\frac{1}{2}\right) + P_n\left(\frac{1}{3}\right)\right]$

ب. $16P_n\left(\frac{1}{5}\right) - 4P_n\left(\frac{1}{239}\right)$

24. افترض أن $fl(y)$ تقريب k من الخانات لـ y. أثبت أن

$$\left|\frac{y - fl(y)}{y}\right| \leq 0.5 \times 10^{-k+1}$$

[إرشاد: إذا كان $d_{k+1} < 5$ فإن $fl(y) = 0.d_1d_2 \dots d_k \times 10^n$. وإذا كان $d_{k+1} \geq 5$ فإن $fl(y) = 0.d_1d_2 \dots d_k \times 10^n + 10^{n-k}$]

25. إن معاملات ذات الحدين $\binom{m}{k} = \dfrac{m!}{k!\,(m-k)!}$

تحسب عدد الطرائق لاختيار مجموعة جزئية ذات سعة k من مجموعة سعتها m.

أ. افترض أن أعداد حاسبة عشرية بالصيغة

$\pm 0.d_1d_2d_3d_4 \times 10^n$ مع $1 \leq d_1 \leq 9,\ 0 \leq d_i \leq 9$ إذا كان $i = 2, 3, 4$ و $|n| \leq 15$.

ما أكبر قيمة لـ m لتكون معاملات ذات الحدين $\binom{m}{k}$ التي يمكن حسابها لجميع قيم k وفق التعريف، دون التسبب في اتساع النتيجة؟

ب. أثبت أنه يمكن حساب $\binom{m}{k}$ أيضًا من خلال $\binom{m}{k} = \left(\frac{m}{k}\right)\left(\frac{m-1}{k-1}\right)\cdots\left(\frac{m-k+1}{1}\right)$.

ج. ما أكبر قيمة لـ m لتكوّن معاملات ذات الحدين $\binom{m}{3}$ التي يمكن حسابها وفق الصيغة في (ب) دون التسبب في اتساع النتيجة؟

د. استخدم الصيغة في (ب) وحساب القطع ذي الخانات الأربع لحساب عدد مجموعات الورق الخماسية المحتمل سحبها من حزمة ورق من 52 ورقة. احسب الأخطاء الحقيقية والنسبية.

26. ليكن $f \in C[a, b]$ دالّةً مشتقته موجودة على (a, b). افترض أننا نريد تقييم f عند x_0 ضمن (a, b) بدلًا من حساب القيمة الحقيقية $f(x_0)$، والقيمة التقريبية $\tilde{f}(x_0)$ هي القيمة الحقيقية لـ f عند $x_0 + \epsilon$ بمعنى أن $\tilde{f}(x_0) = f(x_0 + \epsilon)$.

أ. استخدم مبرهنة القيمة الوسيطية لتقدير الخطأ المطلق $|f(x_0) - \tilde{f}(x_0)|$، والخطأ النسبي $|f(x_0) - \tilde{f}(x_0)|/|f(x_0)|$ مفترضين $f(x_0) \neq 0$.

ب. إذا كانت $\epsilon = 5 \times 10^{-6}$ و $x_0 = 1$ فأوجد حدودًا للخطأ المطلق والخطأ النسبي لـ

i. $f(x) = e^x$ **ii.** $f(x) = \sin x$

ج. كرّر (ب) مع $\epsilon = (5 \times 10^{-6})x_0$ و $x_0 = 10$.

27. تقطع عمليات Maple الآتية العدد الطافح x إلى t من الخانات

```
chop:=proc(x,t);
 if x=0 then 0
 else
 e:=ceil(evalf(log10(abs(x))));
 x2:=evalf(trunc(x*10^(t-e))
 *10^(e-t));
 fi
end;
```

تحقّق من فاعلية العملية للقيم الآتية:

أ. $x = 124.031,\ t = 5$ ب. $x = 124.036,\ t = 5$ ج. $x = -124.031,\ t = 5$ د. $x = -124.036,\ t = 5$

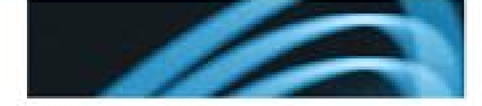
هـ. $x = 124.036,\ t = 5$ و. $x = 0.00656,\ t = 2$ ز. $x = 0.00656,\ t = 2$ ح. $x = -0.00653,\ t = 2$

ل. $x = -0.00656,\ t = 2$

28. أوضح المثال الافتتاحي في هذا الفصل تجربة فيزيائية تضمنت درجة حرارة غاز تحت الضغط. في هذا التطبيق كان لدينا $V = 0.100\ m^3$, $P = 1.00$ atm, $N = 0.00420$ mol و $R = 0.08206$، وبحل T في قانون الغاز المثالي نحصل على

$$T = \frac{PV}{NR} = \frac{(1.00)(0.100)}{(0.00420)(0.08206)} = 290.15\text{ K} = 17^\circ\text{C}$$

لقد وجد أن T تساوي 15°C تحت الظروف المخبرية المذكورة تساوي 15°C، عند مضاعفة الضغط وتناقص الحجم إلى النصف أصبحت T تساوي 19°C. افترض أن البيانات عبارة عن قيم مقربة ودقيقة ضمن المواقع المعطاة، أثبت أن القيم المخبرية ضمن حدود الدقة لقانون الغاز التالي.



3.1 الخوارزميات والتقارب Algorithms and Convergence

سنتفحص خلال هذا الكتاب طرائق للتقريب تسمّى الخوارزميات، وتتضمن متتاليات من الحسابات.

الخوارزميات: هي طريقة تصف دون أي التباس عددًا محدودًا من الخطوات التي تنفّذ بترتيب محدد. إن الغرض من الخوارزميات هو تنفيذ عملية لحل مسألة أو إيجاد تقريب حل لمسألة تستخدم "الرمز الشكلي" Pseudocode لوصف الخوارزميات. إن هذا الرمز الشكلي يحدد شكل المدخلات الواردة وشكل المخرجات المطلوبة.

إن استخدام الخوارزمية قديم قدم الرياضيات المنظمة واسمها مأخوذ من اسم الرياضي العربي محمد بن موسى الخوارزمي (780–850). وتبدأ الترجمة اللاتينية لأعماله بالكلمات: "Dixit Algorismi" التي تعني "يقول الخوارزمي".

ولا تعطي العمليات العددية كلها المخرجات المرضية لمدخلات اختيرت عشوائيًّا. لذا يجب أن تتضمن كل خوارزمية طريقة توقف مستقلة عن الطريقة العددية، لتجنب العروات اللانهائية.

وهناك رمزان للترقيم يستخدام في الخوارزميات

- النقطة (.) وتستخدم لإنهاء خطوة.
- الفاصلة المنقوطة (;) وتفصل بين عملين ضمن خطوة.

ويستخدم الفراغ في بداية الفقرة Indentation ليدل على أن مجموعات من العبارات وجب التعامل معها بوصفها وحدة واحدة.

أما تقنيات العروات في الخوارزميات، فإما أن تكون محكمة بالعد Counter – Controlled مثل

لكل $i = 1, 2, \ldots, n$

ضع $x_i = a_i + i \cdot h$

وإما أن تكون محكمة بالشرط Controlled – condition مثل:

عندما يكون $i < N$ أجر الخطوات 3 – 6.

While $i < N$ do Steps 3–6

ولكي نسمح بالتنفيذ الشرطي؛ نستخدم الصيغ الآتية

إذا كان ... فإن If ... then

أو إذا كان ... فإن غير ذلك If ... then else

تتبع خطوات الخوارزميات قواعد إنشاء البرامج البنائية، وقد رُتّبت على أن تتضمن أدنى صعوبة عند ترجمة الرمز الشكلي إلى أي لغة برمجة صالحة للتطبيقات العلمية. تحوي الخوارزميات

كثيرًا من التعليقات التي تكتب بخط مائل ضمن أقواس لتمييزها من العبارات الخوارزمية.

مثال 1 نصف فيما يأتي إحدى الخوارزميات لحساب $\sum_{i=1}^{N} x_i = x_1 + x_2 + \cdots + x_N$ حيث N و $x_1, x_2, \ldots, x_N$ معطاة.

المدخلات: $N, x_1, x_2, \ldots, x_N$

المخرجات: $SUM = \sum_{i=1}^{N} x_i$

الخطوة	المضمون
1	ضع $SUM = 0$ (المجموع الابتدائي)
2	عند $N, \ldots, i = 1, 2$ نفذ ضع $SUM = SUM + x_i$ (أضف الحد التالي).
3	المخرجات (SUM) توقف.

■

مثال 2 كثيرة حدود تايلور من الرتبة N للدّالة $f(x) = \ln x$ مفكوك حول $x_0 = 1$ هي

$$P_N(x) = \sum_{i=1}^{N} \frac{(-1)^{i+1}}{i}(x-1)^i$$

وقيمة $\ln 1.5$ لثماني خانات عشرية هي 0.40546511.

افترض أننا نريد إيجاد أقل قيمة للعدد N التي تحقّق $|\ln 1.5 - P_N(1.5)| < 10^{-5}$ دون استخدام الحد الباقي لكثيرة حدود تايلور.

نعلم من حساب التفاضل والتكامل أنه إذا كانت $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ متسلسلة متناوبة ذات نهاية A تتناقص القيم المطلقة لحدودها، فإن A والمجموع الجزئي $A_N = \sum_{n=1}^{N} a_n$ ذا الرتبة N يختلفان بقيمة أقل من قيمة الحد ذي الرتبة $(N+1)$، أي أن

$$|A - A_N| \le |a_{N+1}|$$

تستخدم هذا الحد في الخوارزمية الآتية:

المدخلات: القيمة x، حد السماح TOL، أكبر عدد تكرارات M.

المخرجات: الرتبة N لكثيرة حدود أو عبارة فشل.

الخطوة	المضمون
1	ضع $N = 1$ $y = x - 1$ $SUM = 0$ $POWER = y$ $TERM = y$ $SIGN = -1$ (تستخدم لتنفيذ عكس الإشارات).
2	بينما $N \le M$ نفذ الخطوات 3 – 5.
3	ضع $SIGN = -SIGN$ (لعكس الإشارة) $SUM = SUM + SIGN \cdot TERM$ (لجمع الحدود). $POWER = POWER \cdot y$ $TERM = POWER/(N+1)$ (لحساب الحد التالي).
4	إذا كان $|TERM| < TOL$ فإن (لاختبار الدقة). المخرجات (N)

5	ضع $N = N + 1$ (حضّر للتكرار التالي).
6	المخرجات ('Method Failed') (العملية لم تكن ناجحة). توقف.

■

إن المدخلات في مسألتنا هي $x = 1.5, TOL = 10^{-5}$ وربما $M = 15$. إن اختيار M يعطي حدًّا أعلى لعدد العمليات الحسابية التي يرغب في إجرائها، مع علمنا بإمكانية فشل الخوارزمية إذا اجتزنا هذا الحد. إن المخرج (الناتج) هو قيمة للعدد N أو رسالة فشل يعتمد على دقة أداة الحساب. سنتصدى لمسائل تقريب متعددة في محتوى الكتاب، وفي كل حالة نحتاج إلى تحديد طرائق التقريب التي تعطي نتائج صحيحة يمكن الاعتماد عليها لحل مجموعة واسعة من المسائل. كما نحتاج إلى شروط مختلفة لتصنيف دقة هذه الطرائق بسبب الاختلاف بين الطرائق المستخدمة لاشتقاق التقريب. وليس من الضروري أن تكون هذه الشروط جميعها مناسبة لمسألة بعينها.

■

إن جذر stable هو نفسه جذر stand وstandard، وفي الرياضيات فإن كلمة مستقر stable تعني أن تغييرًا صغيرًا في البيانات الابتدائية أو الشروط لا يؤدي إلى تغيير كبير في حل تلك المسألة.

إن أحد المعايير التي نضعها على الخوارزمية كلما أمكن ذلك، هو أن التغييرات الصغيرة في البيانات الابتدائية تُنتج في المقابل تغييرات صغيرة في النتائج النهائية. إن الخوارزمية التي تحقّق هذه الخاصية تسمى مستقرة stable، وفي غير ذلك فهي غير مستقرة unstable. إن بعض الخوارزميات تكون مستقرة فقط عند اختيارات محددة للبيانات الابتدائية. وتسمّى هذه الخوارزميات مستقرة شرطيًّا Conditionally Stable. سنصف خواص استقرار الخوارزميات كلما كان ذلك ممكنًا. ولكي نتفحص موضوع نمو خطأ التقريب وعلاقته باستقرار الخوارزمية؛ نفترض أن خطأ قيمته $E_0 > 0$ قد وقع عند خطوة ما في الحسابات، وإن مقدار الخطأ بعد n من العمليات الآتية هو E_n. وتوجد حالتان تحدثان عمليًّا في أكثر الأحيان نعرفهما كما يأتي.

تعريف 17.1 افترض أن $E_0 > 0$ هو الخطأ الابتدائي، وأن E_n هي قيمة الخطأ بعد n من الخطوات الآتية. إذا كان $E_n \approx CnE_0$ حيث كان C ثابتًا لا يعتمد على n، فإن نمو الخطأ يسمّى خطيًّا Linear. وإذا كان $E_n \approx C^n E_0$ حيث $C > 1$ فإن نمو الخطأ يسمى أسيًّا Exponential. ■

لا يمكن تجنب النمو الخطي للخطأ عادة، وعندما يكون C و E_0 صغيرين، فإن النتائج تكون مقبولة عمومًا، أما النمو الأسيّ فيجب تجنبه؛ لأن الحد C^n يصبح كبيرًا حتى لقيم n الصغيرة نسبيًّا، وإن هذا ليس دقيقًا مهما كان حجم E_0، وعندئذ فإن الخوارزمية التي تعطي نموًّا خطيًّا للخطأ تكون ثابتة، حيث أن الخوارزمية التي تعطي نموًّا أسيًّا للخطأ تكون غير مستقرة. (انظر الشكل 11.1)

تمثّل النقاط الظاهرة الواقعة على خط مستقيم (في أسفل الشكل 11.1) نموّ الخطأ الخطي المستقر، حيث تمثّل النقاط في الجزء العلوي في الشكل نمو الخطأ الأسّيّ غير المستقر.

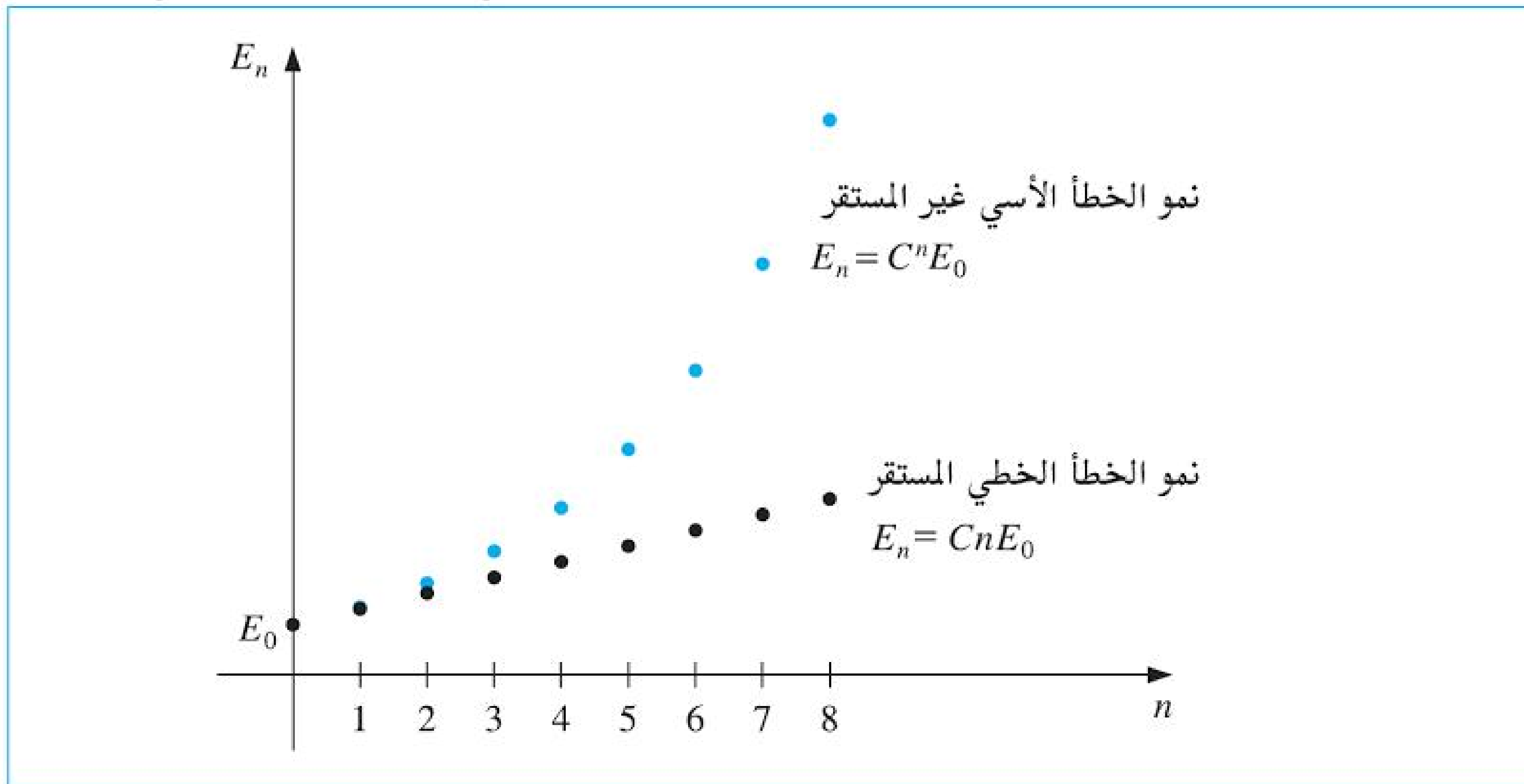
مثال 3 إن الصيغة الإرجاعية recursive

$$p_n = \frac{10}{3}p_{n-1} - p_{n-2} \quad \text{لِـ} \quad n = 2, 3, \ldots$$

لها الحل

$$p_n = c_1\left(\frac{1}{3}\right)^n + c_2 3^n$$

شكل 1.11



لأي ثابتين c_1 و c_2 لأن

$$\frac{10}{3}p_{n-1} - p_{n-2} = \frac{10}{3}\left[c_1\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} + c_2 3^{n-1}\right] - \left[c_1\left(\frac{1}{3}\right)^{n-2} + c_2 3^{n-2}\right]$$
$$= c_1\left(\frac{1}{3}\right)^{n-2}\left[\frac{10}{3}\cdot\frac{1}{3} - 1\right] + c_2 3^{n-2}\left[\frac{10}{3}\cdot 3 - 1\right]$$
$$= c_1\left(\frac{1}{3}\right)^{n-2}\left(\frac{1}{9}\right) + c_2 3^{n-2}(9) = c_1\left(\frac{1}{3}\right)^n + c_2 3^n = p_n$$

إذا كان $p_0 = 1$ و $p_1 = \frac{1}{3}$ فإن $c_1 = 1$ و $c_2 = 0$ عندئذ تكون قيمة $p_n = \left(\frac{1}{3}\right)^n$ لقيم n جميعها. افترض أنك استخدمت حساب التقريب من الخانات الخمس لحساب حدود المتتالية المعطاة بهذه الصيغة، عندها تكون قيمة $\hat{p}_0 = 1.0000$، و $\hat{p}_1 = 0.33333$ وهو ما يتطلب تعديل الثوابت لـ $\hat{c}_1 = 1.0000$ و $\hat{c}_2 = -0.12500 \times 10^{-5}$ إن المتتالية التقريبية $\{\hat{p}_n\}_{n=0}^{\infty}$ الناتجة تعطى بالمعادلة

$$\hat{p}_n = 1.0000\left(\frac{1}{3}\right)^n - 0.12500 \times 10^{-5}(3)^n$$

ويكون خطأ التقريب

$$p_n - \hat{p}_n = 0.12500 \times 10^{-5}(3^n)$$

وينمو أسيًّا مع n، وهذا يعكس عدم دقة قصوى بعد عدد قليل من الحدود، ويظهر في الجدول (5.1) أيضًا في صفحة (34).

إن الصيغة الإرجاعية $p_n = 2p_{n-1} - p_{n-2}$ لكل $n = 2, 3, \ldots$ من جهة أخرى لها الحل $p_n = c_1 + c_2 n$ لأي ثابتين c_1 و c_2؛ لأن

$$2p_{n-1} - p_{n-2} = 2(c_1 + c_2(n-1)) - (c_1 + c_2(n-2))$$
$$= c_1(2-1) + c_2(2n - 2 - n + 2) = c_1 + c_2 n = p_n$$

جدول 5.1

n	المحسوب $\hat{p}_n$	الصحيح p_n	الخطأ النسبي
0	0.10000×10^1	0.10000×10^1	
1	0.33333×10^0	0.33333×10^0	
2	0.11110×10^0	0.11111×10^0	9×10^{-5}
3	0.37000×10^{-1}	0.37037×10^{-1}	1×10^{-3}
4	0.12230×10^{-1}	0.12346×10^{-1}	9×10^{-3}
5	0.37660×10^{-2}	0.41152×10^{-2}	8×10^{-2}
6	0.32300×10^{-3}	0.13717×10^{-2}	8×10^{-1}
7	-0.26893×10^{-2}	0.45725×10^{-3}	7×10^0
8	-0.92872×10^{-2}	0.15242×10^{-3}	6×10^1

إذا كان $p_0 = 1$ و $p_1 = \frac{1}{3}$ فإن الثوابت في هذه الصيغة تصبح $c_1 = 1$ و $c_2 = -\frac{2}{3}$ ويكون $p_n = 1 - \frac{2}{3}n$. وباستخدام حساب التقريب لخمسة أرقام ينتج في هذه الحالة أن $\hat{p}_0 = 1\ 0000$ و $\hat{p}_1 = 0.33333$ ونتيجة لذلك، تصبح قيم الثوابت المقّربة لخمسة خانات هي $\hat{c}_1 = 1.0000$ و $\hat{c}_2 = -0.66667$، وهكذا يكون

$$\hat{p}_n = 1.0000 - 0.66667n$$

وبذلك يصبح خطأ التقريب

$$p_n - \hat{p}_n = \left(0.66667 - \frac{2}{3}\right) n$$

وينمو خطيًّا مع n، و ينعكس هذا في الاستقرار الظاهر في جدول (6.1). ■

جدول 6.1

n	المحسوب $\hat{p}_n$	الصحيح p_n	الخطأ النسبي
0	0.10000×10^1	0.10000×10^1	
1	0.33333×10^0	0.33333×10^0	
2	-0.33330×10^0	-0.33333×10^0	9×10^{-5}
3	-0.10000×10^1	-0.10000×10^1	0
4	-0.16667×10^1	-0.16667×10^1	0
5	-0.23334×10^1	-0.23333×10^1	4×10^{-5}
6	-0.30000×10^1	-0.30000×10^1	0
7	-0.36667×10^1	-0.36667×10^1	0
8	-0.43334×10^1	-0.43333×10^1	2×10^{-5}

يمكن تخفيف تأثيرات أخطاء التقريب باستخدام حساب لمراتب من رتب كبيرة، مثل الخيار الثنائي الدقة أو المتعدد الدقة المتاح في معظم الحواسيب.

إن مساوئ استخدام الحساب الثنائي الدقة تكمن في استغراقه وقتًا أطول، وعدم إلغائه أخطاء التقريب، بل تأجيل ذلك إلى حين إجراء عمليات حسابية آتية.

إن إحدى الطرائق لتوقع خطأ التقدير تكون باستخدام حساب الفئات (أي الاحتفاظ بأصغر القيم الممكنة وأكبرها في كل خطوة)، وبذلك نحصل على فترة تحوي القيمة الحقيقية في النهاية. ولسوء الحظ قد نحتاج إلى فترة صغيرة جدًّا للتنفيذ المعقول.

وبما أننا نستخدم التقنية التفاعلية المتضمنة المتتاليات نختتم هذا الفصل بمناقشة بعض المصطلحات التي تصف معدل التقارب الحادث عند توظيف (تطبيق) التقنية العددية. وبصورة عامة، فإننا نرغب في حدوث التقارب بأقصى سرعة ممكنة.

ونستعمل التعريف الآتي للمقارنة بين سرعة تقارب الطرائق المختلفة.

تعريف 18.1 لتكن $\{\beta_n\}_{n=1}^{\infty}$ متتالية تتقارب نحو الصفر، و $\{\alpha_n\}_{n=1}^{\infty}$ تتقارب نحو العدد α. إذا وجد ثابتًا موجبًا K يحقق

$$|\alpha_n - \alpha| \le K|\beta_n| \quad \text{لقيم } n \text{ الكبيرة}$$

فإننا نقول: إن $\{\alpha_n\}_{n=1}^{\infty}$ تتقارب نحو العدد α بسرعة تقارب $O(\beta_n)$ (يقرأ هذا التعبير "oh كبيرة لقيمة β_n "). ويشار إليها بكتابة $\alpha_n = \alpha + O(\beta_n)$. ■

ومع أن التعريف (18.1) يسمح للمتتالية $\{\alpha_n\}_{n=1}^{\infty}$ بأن تقارن بأي متتالية $\{\beta_n\}_{n=1}^{\infty}$ فإننا في معظم الحالات نستخدم

$$\beta_n = \frac{1}{n^p}$$

حيث إن p عدد موجب $p > 0$، وعادة ما يكون اهتمامنا بأكبر قيمة للعدد p التي تحقق $\alpha_n = \alpha + O(1/n^p)$.

مثال 4 افترض أنه لكل $n \ge 1$ لدينا

$$\hat{\alpha}_n = \frac{n+3}{n^3} \quad \text{و} \quad \alpha_n = \frac{n+1}{n^2}$$

فمع أن $\lim_{n\to\infty} \alpha_n = 0$ و $\lim_{n\to\infty} \hat{\alpha}_n = 0$ فإن المتتالية $\{\hat{\alpha}_n\}$ تتقارب إلى هذه النهاية بسرعة أكبر كثيرًا من المتتالية $\{\alpha_n\}$، على نحو الجدول (7.1) الذي حسب مستخدمًا حساب التقريب بخمسة أرقام.

جدول 7.1

n	1	2	3	4	5	6	7
α_n	2.00000	0.75000	0.44444	0.31250	0.24000	0.19444	0.16327
$\hat{\alpha}_n$	4.00000	0.62500	0.22222	0.10938	0.064000	0.041667	0.029155

توجد طرائق متعددة أخرى لوصف نمو المتتاليات والدّوال، ويتطلب بعضها حدودًا عليا وحدودًا دنيا للمتتالية أو الدّالة تحت الدراسة. إن أي كتاب جيد في تحليل الخوارزميات مثل [CLRS] يحتوي على هذه المعلومات.

إذا افترضنا $\beta_n = 1/n$ و $\hat{\beta}_n = 1/n^2$ نجد أن

$$|\alpha_n - 0| = \frac{n+1}{n^2} \le \frac{n+n}{n^2} = 2 \cdot \frac{1}{n} = 2\beta_n$$

و

$$|\hat{\alpha}_n - 0| = \frac{n+3}{n^3} \le \frac{n+3n}{n^3} = 4 \cdot \frac{1}{n^2} = 4\hat{\beta}_n$$

عندئذ

$$\hat{\alpha}_n = 0 + O\left(\frac{1}{n^2}\right) \quad \text{و} \quad \alpha_n = 0 + O\left(\frac{1}{n}\right)$$

إن سرعة تقارب $\{\alpha_n\}$ للصفر مماثلة لسرعة تقارب $\{1/n\}$ للصفر، حيث تتقارب $\{\hat{\alpha}_n\}$ للصفر بسرعة مماثلة للمتتالية الأسرع في التقارب $\{1/n^2\}$. ■

نستعمل أيضًا رمز oh الكبيرة لوصف السرعة التي تتقارب فيها الدوال.

تعريف 19.1 افترض أن $\lim_{h\to0} G(h) = 0$، وأن $\lim_{h\to0} F(h) = L$. إذا وجدنا ثابتًا موجبًا K حيث إن $|F(h) - L| \le K|G(h)|$ لقيم h الصغيرة على نحو كافٍ فعندئذ نكتب

$$F(h) = L + O(G(h))$$ ■

إن الدّوال التي نستخدمها للمقارنة عادة ما تأخذ الصورة $G(h) = h^p$، حيث إن $p > 0$ ينصبّ اهتمامنا على أكبر قيمة للعدد p التي تحقّق $F(h) = L + O(h^p)$.

مثال 5 لقد وجدنا في المثال (3) (ب) من الفصل (1.1) أن كثيرة حدود تايلور تعطي

$$\cos h = 1 - \tfrac{1}{2}h^2 + \tfrac{1}{24}h^4 \cos\xi(h)$$

لعدد ما $\xi(h)$ بين الصفر و h، وأخيرًا يكون

$$\cos h + \tfrac{1}{2}h^2 = 1 + \tfrac{1}{24}h^4 \cos\xi(h)$$

وهذا يتضمن أن

$$\cos h + \tfrac{1}{2}h^2 = 1 + O(h^4)$$

لأن

$$|(\cos h + \tfrac{1}{2}h^2) - 1| = |\tfrac{1}{24}\cos\xi(h)|h^4 \le \tfrac{1}{24}h^4$$

وهذا يعني أنه عندما تكون $h\to0$، فإن $\cos h + \frac{1}{2}h^2$ يتقارب إلى نهاية 1 بسرعة قريبة من سرعة تقارب h^4 للصفر. ■

مجموعة التمارين 3.1 EXERCISE SET

1. أ. استخدم حساب القطع لثلاثة أرقام لتجد المجموع $\sum_{i=1}^{10}(1/i^2)$، مستخدمًا $\frac{1}{1} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{100}$ أولًا ثم $\frac{1}{100} + \frac{1}{81} + \cdots + \frac{1}{1}$. أي الطريقتين أدق؟ ولماذا؟
   ب. اكتب خوارزمية لإيجاد مجموع المتسلسلة المحدودة $\sum_{i=1}^{N} x_i$ بترتيب عكسي.
2. يعرّف العدد e بالسلسلة $e = \sum_{n=0}^{\infty}(1/n!)$، استخدم حساب القطع لأربعة أرقام لإيجاد التقريبات الآتية للعدد e، ثم احسب الخطأ المطلق والخطأ النسبي:
   أ. $e \approx \sum_{n=0}^{5} \frac{1}{n!}$
   ب. $e \approx \sum_{j=0}^{5} \frac{1}{(5-j)!}$
   ج. $e \approx \sum_{n=0}^{10} \frac{1}{n!}$
   د. $e \approx \sum_{j=0}^{10} \frac{1}{(10-j)!}$
3. إن متسلسلة ماكلورين لدالّة الظل المقابل متقاربة على الفترة $-1 < x \le 1$ وهي
$$\arctan x = \lim_{n\to\infty} P_n(x) = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1} \frac{x^{2i-1}}{2i-1}$$
   أ. استخدم الحقيقة $\tan \pi/4 = 1$ لإيجاد عدد الحدود n للمتسلسلة المطلوب جمعها للحصول على $|4P_n(1) - \pi| < 10^{-3}$.
   ب. تشترط لغة البرمجة C++ أن تكون قيمة π صحيحة بحد خطأ أصغر من 10^{-10}. ما عدد حدود السلسلة التي نحتاج إلى جمعها للحصول على هذه الرتبة من الدقة؟
4. يقدم التمرين (3) تفاصيل طريقة غير فعالة للحصول على تقريب العدد π، ويمكن تحسين هذه الطريقة على نحو مفيد بملاحظة أن $\pi/4 = \arctan\frac{1}{2} + \arctan\frac{1}{3}$ ثم إيجاد قيمة متسلسلة الظل المقابل arctan عند $\frac{1}{2}$ وعند $\frac{1}{3}$. أوجد عدد حدود السلسلة التي يجب جمعها لضمان تقريب العدد π ضمن 10^{-3}.

5. توجد صيغة أخرى لحساب π يمكن استنتاجها من المتطابقة $\pi/4 = 4\arctan\frac{1}{5} - \arctan\frac{1}{239}$. أوجد عدد حدود السلسلة التي يجب جمعها لضمان تقريب العدد π ضمن 10^{-3}.

6. أوجد سرعة التقارب للمتتاليات الآتية عندما $n \to \infty$:

أ. $\lim_{n\to\infty} \sin\frac{1}{n} = 0$

ب. $\lim_{n\to\infty} \sin\frac{1}{n^2} = 0$

ج. $\lim_{n\to\infty} \left(\sin\frac{1}{n}\right)^2 = 0$

د. $\lim_{n\to\infty} [\ln(n+1) - \ln(n)] = 0$

7. أوجد سرعة تقارب الدوال الآتية عندما $h \to 0$

أ. $\lim_{h\to 0} \frac{\sin h}{h} = 1$

ب. $\lim_{h\to 0} \frac{1-\cos h}{h} = 0$

ج. $\lim_{h\to 0} \frac{\sin h - h\cos h}{h} = 0$

د. $\lim_{h\to 0} \frac{1-e^h}{h} = -1$

8. أ. ما عدد عمليات الضرب والجمع المطلوبة لإيجاد حاصل جمع الصيغة

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{i} a_i b_j \text{؟}$$

ب . عدّل الصيغة في (أ) على أن تقلّل عدد العمليات الحسابية.

9. لتكن $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ كثيرة حدود، وافترض أن x_0 معطاة. أنشئ خوارزمية لإيجاد قيمة $P(x_0)$ مستخدمًا عمليات الضرب المتداخلة.

10. يعطي التمرين (5) من الفصل (2.1) صيغ بديلة للجذرين x_1 و x_2 للصيغة $ax^2 + bx + c = 0$. أنشئ خوارزمية بالمدخلات a, b, c والمخرجات x_1 و x_2 لتحسب الجذرين x_1 و x_2 (اللذين يمكن أن يكونا متساويين أو مرافقين مركبين) مستخدمًا أفضل صيغة لكل جذر.

11. أنشئ خوارزمية مدخلاتها عدد صحيح $n \geq 1$، الأعداد $x_0, x_1, \ldots, x_n$ وعدد x التي مخرجها حاصل الضرب $(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_n)$.

12. افترض أن $\frac{1-2x}{1-x+x^2} + \frac{2x-4x^3}{1-x^2+x^4} + \frac{4x^3-8x^7}{1-x^4+x^8} + \cdots = \frac{1+2x}{1+x+x^2}$

لكل $x < 1$ وافترض أن $x = 0.25$، اكتب خوارزمية تحدد عدد الحدود المطلوبة في الطرف الأيسر للصيغة، ونفّذها على أن يكون اختلاف الطرف الأيسر عن الطرف الأيمن أقل من 10^{-6}.

13. أ. افترض أن $0 < q < p$ وأن $\alpha_n = \alpha + O(n^{-p})$ برهن أن $\alpha_n = \alpha + O(n^{-q})$.

ب. اكتب جدولًا فيه $1/n, 1/n^2, 1/n^3$ و $1/n^4$ للقيم $n = 5, 10, 100$ و 1000، وناقش معدلات التقارب المختلفة لهذه المتتاليات عندما تصبح n كبيرة.

14. أ. افترض أن $0 < q < p$ وأن $F(h) = L + O(h^p)$، برهن على أن $F(h) = L + O(h^q)$.

ب. اكتب جدولًا فيه h, h^2, h^3, h^4 للقيم $h = 0.5, 0.1, 0.01$ و 0.001، وناقش معدلات التقارب المختلفة لقوى h هذه عندما تقترب h من الصفر.

15. افترض أنه عندما تقترب x من الصفر يكون

$$F_1(x) = L_1 + O(x^{\alpha}) \text{ و } F_2(x) = L_2 + O(x^{\beta})$$

وليكن كل من c_1 و c_2 عددين ثابتين غير الصفر، وعرّف

$$F(x) = c_1F_1(x) + c_2F_2(x) \text{ و } G(x) = F_1(c_1x) + F_2(c_2x)$$

برهن على أنه إذا كان $\gamma = \text{minimum}\ \{\alpha, \beta\}$، فإنه عندما تقترب x من الصفر فإن

أ. $F(x) = c_1 L_1 + c_2 L_2 + O(x^{\gamma})$

ب. $G(x) = L_1 + L_2 + O(x^{\gamma})$

16. تسمّى المتتالية $\{F_n\}$ المعرفة على الصورة الآتية $F_0 = 1, F_1 = 1$ و $F_{n+2} = F_n + F_{n+1}$ لكل $n \ge 0$، متتالية فيبوناتشـي (Fibonacci Sequence). إن حدود هذه المتتالية تحدث طبيعيًّا في كثير من الأصناف الحياتية، خصوصًا مثل تلك التي لها بتلات وحراشف مرتبة على صورة لولب لوغارتمي. لتكن المتتالية $\{x_n\}$ معرّفة بالصيغة $x_n = F_{n+1}/F_n$. على فرض أن $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ موجودة، أثبت أن $x = (1+\sqrt{5})/2$. يسمّى هذا العدد النسبة الذهبية (golden ratio).

17. إن متتالية فيبوناتشي تحقّق الصيغة $F_n \equiv \tilde{F}_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right]$

أ. اكتب عملية لحساب F_{100} مستخدمًا Maple.

ب. استخدم Maple بالقيمة المفترضة للأمر Digits متبوعًا بالأمر evalf لحساب $\tilde{F}_{100}$.

ج. لماذا نجد القيمة في (أ) أدق من تلك في (ب)؟

د. لماذا يكون الحصول على النتيجة باستخدام (ب) أسرع من الحصول على النتيجة باستخدام الطريقة في (أ)؟

هـ. ماذا يحدث عندما تستخدم الأمر Simplify بدلًا من الأمر evalf في حساب $\tilde{F}_{100}$؟

18. السلسلة التوافقية $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots$ تباعدية (divergent)، ولكن المتتالية $\gamma_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln n$ متقاربة؛ لأن $\{\gamma_n\}$ متتالية محدودة غير متزايدة. إن النهاية $\gamma = 0.5772156649\ldots$ للمتتالية $\{\gamma_n\}$ تسمّى ثابت أويلر (Euler).

أ. استخدم القيمة المفترضة للأمر Digits في Maple لتحديد قيمة n لتكون γ_n قريبة من γ ضمن الحد 10^{-2}.

ب. استخدم القيمة المفترضة للأمر Digits في Maple لتحديد قيمة n لتكون γ_n قريبة من γ ضمن الحد 10^{-3}.

ج. ماذا يحدث إذا استخدمت القيمة المفترضة للأمر Digits في Maple لتحديد قيمة n لتكون γ_n قريبة من γ ضمن الحد 10^{-4}؟

4.1 البرمجيات العددية Numerical Software

توجد برامج حاسـوبية لتقريب حلول عددية للمسـائل. في هذا الكتاب قدّمنا برامج مكتوبة باللغات Mathematica, MATLAB, Pascal, C, FORTRAN, Maple و Java، لغرض استخدامها في حل الأمثلة والتمارين الواردة في هذا الكتاب. وتعطي هذه البرامج نتائج مرضية لمعظم المسائل التي تحتاج إلى حل، ولكنها تقع ضمن ما نسميه برامج الغرض الخاص، ونستخدم هذا المصطلح لنميّز بين هذه البرامج وبرامج الرياضيات العادية، وإن البرامج في هذه الحقائب تسـمى برامج الغرض العام.

إن البرامـج فـي حقائب الغرض العام تختلف في محتواها عن الخوارزميات والبرامج الواردة فـي هـذا الكتاب. وإن حقائـب الغرض العام تتعامـل مع طرائق لتقليل الأخطـاء الناتجة عن

التقريب الآلي، والانسياب السفلي والانسياب العلوي، وهي تصف أيضًا مدى المدخلات التي تؤدي إلى نتائج ذات دقة محدّدة معينة.

ولما كانت هذه الخواص تعتمد على الآلة فإن الحقائب ذات الغرض العام تستخدم وسيطات تصف مؤشرات النقطة العائمة للآلة المستخدمة في الحسابات.

ولتوضيح بعض الفروق بين البرامج في حقائب الغرض العام والبرنامج الذي ضمّناه في هذا الكتاب؛ افترض البرنامج الذي نستخدمه لإيجاد المعيار الإقليدي لمتجه بعده n $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^t$ إن هذا (المعيار) (norm) غالبًا ما يطلب ضمن البرامج الكبيرة، ويعرّف بالآتي

$$\|\mathbf{x}\|_2 = \left[\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right]^{1/2}$$

يستخدم هذا المعيار (norm) لقياس المسافة بين المتّجه $\mathbf{x}$ والمتّجه $\mathbf{0}$.

على سبيل المثال: معيار المتجه $\mathbf{x} = (2, 1, 3, -2, -1)^t$ هو

$$\|\mathbf{x}\|_2 = [2^2 + 1^2 + 3^2 + (-2)^2 + (-1)^2]^{1/2} = \sqrt{19}$$

وعندئذ فإن بعده عن المتّجه $\mathbf{0} = (0, 0, 0, 0, 0)^t$ هو $\sqrt{19} \approx 4.36$.

نبين هنا نوع الخوارزمية التي تقدمها هذه المسألة؛ إنها لا تحتوي على أي وسيطات (برامترات) تعتمد على الآلة، ولا تقدم أي توكيدات للدقة، ولكنها تعطي نتائج دقيقة في "معظم الأوقات".

المدخلات: $n, x_1, x_2, \ldots, x_n$

المخرجات: $NORM$

الخطوة	المضمون
1	ضع $SUM = 0$
2	عند $i = 1, 2, \ldots, n$ ضع $SUM = SUM + x_i^2$
3	ضع $NORM = SUM^{1/2}$
4	المخرجات $(NORM)$ توقف.

إن البرنامج المبني على هذه الخوارزمية سهل الكتابة والفهم، ولكن قد يفشل البرنامج في إعطاء دقة كافية لعدة أسباب. فعلى سبيل المثال: قد تكون قيمة بعض الأعداد كبيرة جدًّا أو صغيرة جدًّا، فلا يمكن تمثيلها بدقة في نظام النقطة العائمة الحاسوبي. وقد لا يعطي الترتيب العادي لتنفيذ الحسابات النتائج الأدق أيضًا، أو قد لا يكون البرنامج العادي المتاح لاستخراج الجذر التربيعي هو الأفضل بالنسبة إلى هذه المسألة.

إن أمورًا من هذا النوع تؤخذ في الحسبان من قبل مصمّمي الخوارزميات عندما يكتبون برامج ذات غرض عام، وتستخدم هذه البرامج في الغالب على صورة برامج فرعية لحل مسائل أكبر. ولذلك يجب أن تحتوي على ضوابط لا نحتاج إليها.

والآن افترض برنامجًا حاسوبيًّا ذا غرض عام لاستخدامه في حساب المعيار الإقليدي.

أولاً: قد تقع قيمة المركبة x_i للمتّجه ضمن مدى الآلة، ولكن قد لا يقع مربع تلك المركبة ضمن ذلك

المدى. يمكن حدوث مثل هذا الأمر عندما يكون $|x_i|$ صغيرًا جدًّا لدرجة أن x_i^2 يسبب الانسياب السفلي أو عندما تكون $|x_i|$ كبيرة جدًّا، على أن x_i^2 تسبب الانسياب العلوي.

ومن الممكن أن تقع هذه الحدود جميعها ضمن مدى الآلة أيضًا، ولكن الانسياب العلوي يحدث بسبب جمع مربع أحد هذه الأبعاد للمجموع المحسوب.

ولما كانت معايير الدقة تعتمد على الآلة التي تجرى عليها الحسابات، فإن الوسيطات المعتمدة على الآلة تدخل ضمن الخوارزميات. افترض أننا نستخدم حاسوبًا فرضيًّا قاعدته 10، ويملك $t \geq 4$ خانات دقة، وأصغر أسيّة $emin$ وأعلى أسيّة $emax$، عندئذ تكون مجموعة أعداد النقاط العائمة في هذه الآلة مكوّنة من الصفر والأعداد على الصيغة $x = f \cdot 10^e$ حيث

$$f = \pm\,(f_1 10^{-1} + f_2 10^{-2} + \cdots + f_t 10^{-t})$$

حيث لكل $1 \leq f_1 \leq 9$ و $0 \leq f_i \leq 9$ لكل $i = 2, \ldots, t$ حيث $emin \leq e \leq emax$.

إن هذه القيود تعني أن أصغر عدد موجب يمكن تمثيله في الآلة هو $\sigma = 10^{emin-1}$، ومن ثم يمكن لأي عدد محسوب x بقيمة $|x| < \sigma$ أن يسبب انسيابًا أدنى، وينتج عن ذلك أن تصبح قيمة x صفرًا. إن أكبر عدد موجب يمكن تمثيله هو $\lambda = (1 - 10^{-t})10^{emax}$، ومن ثم فإن أي عدد محسوب x بقيمة $|x| > \lambda$ يسبب انسيابًا أعلى. إذا حدث انسياب أدنى غالبًا ما يستمر البرنامج دون أي خسارة مهمة في الدقة، أما عندما يحدث انسياب أعلى فإن البرنامج يفشل.

تفترض الخوارزمية أن خواص الآلة المتعلقة بالنقطة العائمة توصف باستخدام الوسيطات (البرامترات) N, s, S, y, Y سيعبر عن أكبر عدد من المدخلات التي يمكن أن تجمع بدرجة دقة $t/2$ من الأعداد بالرمز N. إن هذا يعني أن الخوارزمية تستمر في العمل لإيجاد قياس المتّجه $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^t$ فقط إذا كان $n \leq N$. ولكي تحل مشكلة الانسياب الأدنى والأعلى، فإن أعداد النقطة العائمة غير الصفرية تقسّم إلى المجموعات الآتية:

- أعداد صغيرة في القيمة x وهي تلك التي تحقّق $0 < |x| < y$.
- أعداد وسيطية في القيمة x عندما يكون $y \leq |x| < Y$.
- أعداد كبيرة في القيمة x عندما يكون $Y \leq |x|$.

نختار الوسيطين y و Y بحيث نضمن عدم وجود مشكلة انسياب أدنى أو أعلى في عمليات التربيع أو جمع الأعداد وسيطية القيمة. إن تربيع الأعداد صغيرة القيمة يمكن أن يؤدي إلى انسياب أدنى، ولذلك يستخدم عامل ضربي S يكبر الواحد بكثير لكي يتجنب العدد $(Sx)^2$ الانسياب الأدنى عندما لا يتجنبه x^2. إن جمع الأعداد ذات القيم الكبيرة وتربيعها يمكن أن يؤدي إلى انسياب أعلى، لذلك نستخدم في هذه الحالة عددًا s أصغر من الواحد بكثير لضمان تجنب $(sx)^2$ الانسياب الأعلى عند دمجه أو حسابه في عملية الجمع حتى ولو كان x^2 يؤدي إلى ذلك الانسياب.

ولتجنب الضرب غير الضروري؛ نختار y و Y بحيث يكون مدى الأعداد وسيطية القيمة كبيرًا قدر الإمكان. إن الخوارزمية الآتية تعديل لتلك المشروحة في [Brow, W, p. 471]، وتستخدم عملية ضرب مركبات المتجه صغيرة القيمة للحصول على واحدة وسيطية القيمة، ثم تنزع الضرب

عن حاصل الجمع وتستمر في تربيع الأعداد الصغيرة والوسيطية وجمعها حتى الوصول إلى مركبة ذات قيمة كبيرة. وبمجرد ظهور مركبة قيمتها كبيرة، تضرب الخوارزمية المجموع السابق، وتستمر في عمليات الضرب في ثابت وفي التربيع، وجمع الأعداد المتبقية. إن الخوارزمية تفترض أنه في أثناء الانتقال من الأعداد الصغيرة إلى الأعداد الوسيطية، تكون الأعداد الصغيرة غير المضروبة في ثابت مهملة مقارنة بالأعداد الوسيطية. وبالمثل في أثناء الانتقال من الأعداد الوسيطية إلى الأعداد الكبيرة، فإن الأعداد الوسيطية غير المضروبة في ثابت تكون مهملة مقارنة بالأعداد الكبيرة. وهكذا يجب اختيار الوسيطات الضربية بحيث تكون مساواة الأعداد للصفر فقط عندما تكون مهملة حقًّا.

إن العلاقات بين خواص الآلة كما وصفت عن طريق $t, \sigma, \lambda, emin, emax$ ومعلمات الخوارزمية N, s, S, y, Y تعطى في آخر الخوارزمية.

تستخدم الخوارزمية ثلاثة أعلام لتبين المراحل المختلفة في عملية الجمع. تعطى هذه الأعلام قيمًا ابتدائية في الخطوة 3 في الخوارزمية. يعطى العلم 1 (FLAG 1) القيمة 1 حتى ملاقاة مركبة وسيطية أو كبيرة، ثم يحوّل إلى 0. يعطى العلم 2 (FLAG 2) القيمة 0 عندما تجمع الأعداد الصغيرة ثم يُحوّل إلى 1 عند ملاقاة أول عدد وسيطي، ويُحول مرة أخرى إلى 0 عند إيجاد عدد كبير.

يعطى العلم 3 (FLAG 3) القيمة 0 ابتداءً، ويتحوّل إلى 1 عند ملاقاة عدد كبير لأول مرّة.

تدخل الخطوة 3 العلم DONE الذي قيمته 0 حتى الانتهاء من الحسابات، ثم يحوّل إلى 1.

المدخلات: $N, s, S, y, Y, \lambda, n, x_1, x_2, \ldots, x_n$

المخرجات: $NORM$ أو عبارة خطأ مناسبة.

الخطوة	المضمون
1	إذا كان $n \le 0$ فالمُخرجات (الحد n يجب أن يكون موجبًا). توقف.
2	إذا كان $n \ge N$ فالمخرجات (الحد n كبير جدًّا). توقف.
3	ضع $SUM = 0$ $FLAG1 = 1$ (الأرقام الصغيرة تجمع). $FLAG2 = 0$ $FLAG3 = 0$ $DONE = 0$ $i = 1$
4	بينما ($i \le n$ و $FLAG1 = 1$) نفذ الخطوة 5.
5	إذا كان $\lvert x_i \rvert < y$ فضع $SUM = SUM + (Sx_i)^2$ $i = i + 1$ ما عدا ذلك ضع $FLAG1 = 0$ (نتج عدد غير صغير).
6	إذا كان $i \le n$ فضع $NORM = (SUM)^{1/2} / S$ $DONE = 1$ ما عدا ذلك ضع $SUM = (SUM/S)/S$ (مقياس للأعداد الكبيرة). $FLAG2 = 1$

7	بينما ($i \le n$ و $FLAG2 = 1$) نفذ الخطوة 8. (تجمع الأعداد الوسيطية).
8	إذا كان $\lvert x_i \rvert < y$ فضع $SUM = SUM + x_i^2$ $i = i + 1$ ما عدا ذلك ضع $FLAG2 = 0$ (نتج عدد كبير).
9	إذا كان $DONE = 0$ فإنه إذا كان $i > n$ فضع $NORM = (SUM)^{1/2}$ $DONE = 1$ ما عدا ذلك ضع $SUM = ((SUM)s)s$ (مقياس للأعداد الكبيرة). $FLAG3 = 1$
10	بينما ($i \le n$ و $FLAG3 = 1$) نفذ الخطوة 11.
11	ضع $SUM = SUM + (sx_i)^2$ (جمع الأعداد الكبيرة). $i = i + 1$
12	إذا كان $DONE = 0$ فإنه إذا كان $SUM^{1/2} < \lambda\, s$ فضع $NORM = (SUM)^{1/2}/s$ $DONE = 1$ ما عدا ذلك ضع $SUM = \lambda$ (المعيار كبير جدًّا).
13	إذا كان $DONE = 1$ فالمخرجات ('Norm is', $NORM$) وما عدا ذلك المخرجات ('Norm ≥', $NORM$ حدث تخطٍ).
14	توقف.

لقد اختيرت العلاقات بين مؤشرات الآلة $t, \sigma, \lambda, emin, emax$ ووسيطات الخوارزمية N, s, S, y, Y في [Brow, W, p. 471] على الصورة الآتية:

$N = 10^{e_N}$ بحيث $e_N = \lfloor (t-2)/2 \rfloor$، أكبر عدد صحيح أقل أو يساوي $(t-2)/2$.

$s = 10^{e_s}$ بحيث $e_s = \lfloor -(emax + e_N)/2 \rfloor$.

$S = 10^{e_S}$ بحيث $e_S = \lceil (1 - emin)/2 \rceil$، أصغر عدد صحيح أكبر أو يساوي $(1 - emin)/2$.

$y = 10^{e_y}$ بحيث $e_y = \lceil (emin + t - 2)/2 \rceil$.

$Y = 10^{e_Y}$ بحيث $e_Y = \lfloor (emax - e_N)/2 \rfloor$.

إن موثوقية هذه الخوارزمية قد زادت التعقيد كثيرًا إذا ما قُورنت بالخوارزمية التي بحثت في هذا الفصل. هناك أشكال كثيرة من البرمجيات العددية ذات الغرض العام متاحة تجاريًّا وفي متناول الجمهور. إن معظم البرمجيات المبكرة كانت قد كتبت للحواسيب المركزية، وإليك مرجع جيد هو *Sources and Development of Mathematical Software* ومحرره Wayne Cowell [Co]. وفي الوقت الحاضر وحين أصبح الحاسوب ذو الشاشة قويًّا بما يكفي، فقد أصبحت البرمجيات العددية متاحة للحواسيب الشخصية ومحطات العمل. وقد كتبت معظم هذه البرمجيات بلغة FORTRAN 77 على الرغم من كتابة بعضها بلغات Java، FORTRAN 90، C++، C. إن عمليات ALGOL كانت قد قدمت لحسابات المصفوفات في عام 1971 [WR]، ثم طوّرت حقيبة برمجيات FORTRAN مبنيــة على عمليات ALGOL، وكان هذا التطوير موجَّهًا إلى برمجيات EISPACK. لقد وُثِّقت هذه البرمجيات عن طريق Springer – Verlag بوصفها جزءًا من مذكرات المحاضرات

لقد طُوِّر الحاسوب الشخصي في أول الثمانينيات من القرن العشرين على يد ستيف وزنياك Steve Wozniak وستيف جوبس Steve Jobs مؤسسي حاسوب أبل Apple Compute.

وكان أول حاسوب محمول هو أوزبورن، Osborne I الذي صنع عام 1981، مع أنه كان أكبر وأثقل كثيراً مما نتصوره الآن حاسوبًا محمولاً.

إن نظام فورتران (FORmula TRANslator) كان لغة البرمجة العلمية الأصلية ذات الغرض العام، وما زالت قيد الاستخدام في الحالات التي تتطلب حسابات علمية متعمقة. وإن الطبعة الحالية المقننة لهذه اللغة هي FORTRAN.

إن مشروع EISPACK هو أول حقيبة كبيرة للبرمجيات العددية التي أصبحت متاحة للاستخدام، وفتحت الطريق لبرمجيات أخرى تتبعها.

في سلسلة علم الحاسوب Lecture Notes in Computer Science Series [Sm,B] and [Gar]. تستخدم برمجيات FORTRAN لحساب القيم المميّزة eigenvalues والمتجهات المميّزة eigenvectors لعــدد من أنواع المصفوفات المختلفة. إن EISPACK مصان من قبل نتلب netlib، ويمكن الدخول إليه عن طريق موقع نتلب http://www.netlib.org أما LINPACK فهو حقيبة برمجيات FORTRAN لتحليل نظم صيغ خطية وحلها وحل مسائل مربعات الصغرى الخطية. إن توثيق هذه البرمجية موجــود في [DBMS]، وموضوع على موقع نتلــب (netlib)، وهناك مقدمة متدرجة خطوة خطوة لبرامــج LINPACK و EISPACK و BLAS (Basic Linear Algebra Subprograms) مشــروحة في [CV] ولقــد أتيحت برمجيــة LAPACK أول مرة عام 1992، وهي من مكتبة برمجيات فورتران، وهــي أقــوى من LINPACK و EISPACK وذلك بتكامل هاتــين المجموعتين من الخوارزميات في برمجية موحدة متجددة. وقد أعيد إنشاء البرمجيات للتوصل إلى معالجات المتّجهات على نحو كافٍ، وأداء أكثر كفاءة أو ذاكرة مشتركة. لقد طُوّر LAPACK أفقيًا وبعمق في الطبعة 3.0 المتاحة JAVA ،C++ ،C ،FORTRAN 90 ،FORTRA. إن حقيبة BLAS ليست جزءًا من LAPACK، ولكن الشيفرة لـ BLAS موزّعة مع LAPACK. وإن دليل LAPACK الطبعة الثالثة متاح من SIAM. The LAPACK User's Guide, 3rd ed.[AN] وهو متاح أيضًا على الموقع

http://www.netlib.org / lapack /lug/lapack_lug.html

ويمكن الحصول على LAPACK أو برمجيات فردية من LAPACK عن طريق موقع نتلب netlib. وتوجــد حقائب أخرى لحل أنواع محددة من المســائل موجودة للاســتخدام العام ومتاحة على نتلب. ويمكن الاستزادة من المعلومات في المقالة "Software Distribution Using Netlib" للمؤلفين [DRW] Wade و Roman و Dongarra. إن هذه البرامج قادرة على فحص الشروط الخاصة جميعها التي يمكن أن تؤدي إلى الخطأ أو الفشل.

تأسســت هندســة البرمجيــات كنظــام مخبري في ســبعينيات وثمانينيــات القــرن العشــرين. حيث طــور برنامج EISPACK فــي مختبرات آرغنــون ولينباك فيما بعد، ومع بداية ثمانينيات القرن العشــرين كانت مختبرات أرغنون ذات شهرة عالمية بكونها القائــدة في هذا المجال ليس فقط فــي المجــال الرمــزي وإنما في مجال الحسابات العددية أيضًا.

سنناقش في آخر كل فصل بعض البرمجيات الملائمة للأغراض العامة. إن البرمجيات التجارية المتاحــة تمثّل ما توصل إليــه العلم في الطرائق العددية. وغالبًا ما تبنى محتوياتها على حقائب المســتوى العمومــي، ولكنها تحتوي على طرائــق في مكتبات لأي نوع من المســائل تتكون من المكتبات STAT ،MATH، و SFUN للرياضيات العددية والإحصاء والدّوال الخاصة على التوالي. تحتوي هذه المكتبات على أكثر من 900 برمجية كانت متاحة أصلًا في FORTRAN 77 ومتاحة الآن فــي FORTRAN 90، C و Java. إن هــذه البرمجيات تحل أكثر مســائل التحليل العددي شــيوعًا. وإن المعلومــات عن المكتبات متاحة على http://www.vni.com وهــي متوفرة على نحو كافٍ وبتوثيــق موســع. ويوجد مثال برامجي لكل برنامج، بالإضافــة إلى معلومات عن القاعدة المرجعية. ويحتوي IMSL على طرائق للأنظمة الخطية، تحليل نظام القيم، الاستيفاء الداخلي، التكامــل والتفاضل، الصيغ التفاضلية، التمويــلات، الصيغ غير الخطية، الأعظمية، وعمليات المصفوفة/المتجهات الرئيسة. وتحتوي المكتبة على برمجيات إحصائية واسعة أيضًا. لقد وجدت مجموعــة الخوارزميات العدديــة The Numerical Algorithms Group (NAG) في المملكة المتحدة منــذ 1970، وتقــدم NAG أكثر مــن 1000 برمجية فــي مكتبــة FORTRAN 77 و400 برمجية فــي مكتبــة C، وأكثر مــن 200 برمجية في مكتبــة FORTRAN 90 ومكتبة لــلآلات المتوازية ومجموعــات مــن محطــات العمل أو الحواســيب الشــخصية. إن مجموعة جزئيــة من مكتبة FORTRAN 77 (the NAG Foundation Library) متاحة للحواسيب الشخصية ومحطات العمل في حال كان فضاء العمل فيها محدودًا. يحتوي دليل استخدام NAG على تعليمات وأمثلة مع مثال

لقــد أصبَّحت IMSL أول مكتبــة علــمية للحواسيب العامــة علــى نطــاق واســع في عــام 1970م. ومنــذ ذلك الوقت أصبحت المكتبات متاحة للأنظمة الحاسوبية على مدى الحواسيب الشخصية.

تــأسَّســت مجمــوعة الخوارزميات العددية (NAG) في المملكة المتحدة عام 1971م، وطوّرت أول مكــتبة لبــرمجــة الرياضيات. وهي تحوي الآن أكثــر من 10,000 مســتخدم، وتحــوي أكثــر مــن ألــف دالّة في الرياضيــات والإحصــاء، تمتــد من البرمجيــات الإحصائية، والرمزية، المرئيــة والمحــاكاة العدديــة إلــى المجــمّعــات وأدوات التــطــويــر التطبيقي.

مخرجات لكل برمجية. إن [Ph] مرجع لمقدمة مفيدة لبرمجيات NAG. تحتوي مكتبة NAG على برمجيات لتنفيذ معظم المهمات الرئيسة في التحليل العددي بطريقة تشبه تلك التي في IMSL، وهي تحتوي على بعض البرمجيات الإحصائية أيضًا، ومجموعة من برمجيات الرسم، والمكتبة متاحة تجاريًّا من مجموعة الخوارزميات العددية ذات الموقع على الشبكة http://www.nag.com لقد صُمِّمت حقائب IMSL و NAG لعالم الرياضيات، والعالم أو المهندس الذي يرغب في استدعاء برمجيات Java، C، أو FORTRAN ذات النوعية العالية من داخل البرنامج. إن التوثيق المتاح مع الحقائب التجارية يشرح البرنامج المطلوب لاستخدام البرامج المكتبية. إن الحقائب الثلاث الآتية ذات بيئات فردية، وعندما تنشط فإن المستخدم يدخل أوامر تؤدي إلى حل مسألة ما عن طريق الحقيبة. وعلى كل حال فإن كل حقيبة تسمح بإنشاء برنامج ضمن لغة الأوامر فيها. إن MATLAB مختبر مصفوفي كان أصلًا برنامج FORTRAN نشره كليف مولر Cleve Moler [Mo] وقد بني معظم المختبر على برمجيات EISPACK و LINPACK مع أن دوال مثل الأنظمة غير الخطية، التكامل العددي، الشرائح التكعيبية، مطابقة المنحنيات، الأعظمية، الصيغ التفاضلية العادية، وأدوات الرسم قد ضمّنت فيه. إن هذا النظام القوي ذا الشمولية الذاتية مفيد خصوصًا لاستخدامه في مقرر الجبر الخطي التطبيقي. لقد أصبح ماتلاب MATLAB متاحًا منذ 1985، ويمكن الحصول على معلومات عن هذا النظام من شركة الأعمال الرياضية The MathWorks Inc، وعنوانها على الإنترنت هو http://www.mathworks.com والحقيبة الأخرى هي مابل Maple، وهي نظام حاسوبي جبري (CAS) طوّر في عام 1980م من قبل مجموعة الحساب الرمزي في جامعة واترلو Symbolic Computational Group at University of Waterloo إن تصميم نظام مابل Maple قد نُشِرَ في بحث تشار، جيرس، جنتلمن، وجونت
B.W. Char, K.O. Geddes, W.M. Gentlemen, and G.H. gonnet [CGGG]

إن مابل Maple متاح منذ الثمانينيات 1980، وعنوان الحقيبة http://www.maplesoft.com ومابل Maple المكتوبة بلغة C قابلة لمعالجة المعلومات بطريقة رمزية. وإن هذه المعالجة الرمزية تسمح للمستخدم بالحصول على الأجوبة الدقيقة بدلًا من القيم العددية. وبإمكان مابل Maple إعطاء أجوبة دقيقة لمسائل رياضية؛ مثل التكاملات، الصيغ التفاضلية، والأنظمة الخطية. إنها تحوي إنشاءً برامجيًّا، وتسمح بحفظ نص الأوامر في ملفات صحائف العمل التي يمكن إدخالها في مابل، ومن ثم تنفيذ الأوامر. لقد اختير مابل لاستخدامه في هذا الكتاب بسبب خصائص الحساب الرمزي، الحساب العددي وصحائف العمل. (تستخدم أوامر مابل وتكتب في متن هذا الكتاب)، والحقيبة الثالثة هي Mathematical التي طوَّرها ولفرام ريسيرج Wolfram Research عام 1985، ونشرت أول مرة عام 1988. إنها حقيبة قوية ومرغوبة من نوع CAS، وهي شائعة في مجالي التربية والأعمال. ويمكن الحصول على المعلومات حول هذه الحقيبة على العنوان http://www.wolfram.com، ويمكن الرجوع إلى كتب كودي وييت [Cody+Waite CW] وكوكلر [Kockler Ko] لمعلومات إضافية حول البرامج ومكتبات البرامج، وإلى بحث دوناكرا واكلر المنشور عام Dongarra + Walker 1995 ويمكن الرجوع إلى كتاب جايتيني–جاتلين وفرايز [CF] Chaitini - Chatelin and Frayse، وكذلك إلى بحث جولدبرغ [Goldberg Goldb] لمعلومات إضافية حول حسابات النقطة العائمة. إن كتب شندل [Schendell Sche]، فيليبس وفريمان [PF] Philips and Freeman، وجولب وأورتيقا [Golub Ortega GO] من الكتب التي تعرض تطبيق الطرائق العددية على الحواسيب المتوازية.

كُتبت ماتلاب MATLAB في الأصل لإتاحة الوصول إلى برمجية للمصفوفة في مشروعات لنباك وايزباك LINPACK و EISPACK.
كُتب النموذج الأول في أواخر 1970 لاستخدامه في مقررات مبرهنة المصفوفات، الجبر الخطي والتحليل العددي. ويوجد في الوقت الحاضر أكثر من 500,000 مستخدم للماتلاب MATLAB في أكثر من 100 بلد.

إن برمجيات NAG متوافقة مع مابل Maple ابتداءً من النموذج 7.0.

مع اختيارنا Maple نظامًا معياريًّا لنا في CAS، فإن Mathematical المشهورة التي ظهرت في عام 1988 يمكن استخدامها لهذا الغرض.

الباب

2

حلول المعادلات بمتغير واحد

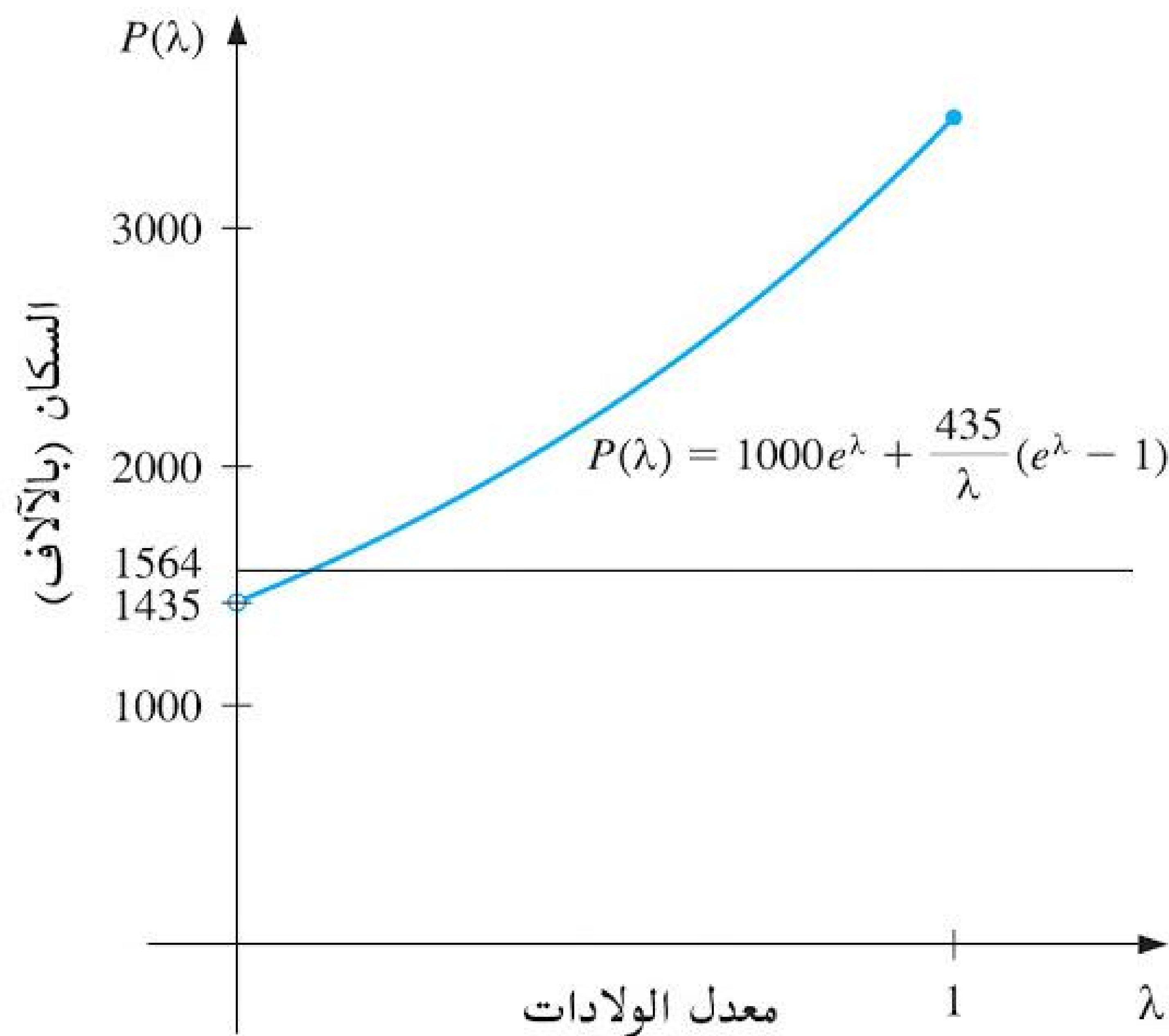
Solution of Equations in One Variable

مقدمة

يمكن نمذجة النمو السكاني عبر فترات زمنية قصيرة بافتراض أن النمو السكاني يكون متصلًا وبمعدل نمو يتناسب مع العدد الفعلي للسكان في الوقت المعين. فلو افترضنا أن $N(t)$ يساوي عدد السكان عند الزمن t، و λ يساوي معدل الولادات (ثابت) للسكان، فيمكن التعبير عن النمو السكاني بالصيغة التفاضلية

$$\frac{dN(t)}{dt} = \lambda N(t)$$

وحل هذه الصيغة هو $N(t) = N_0 e^{\lambda t}$، حيث تمثِّل N_0 عدد السكان الابتدائي



وهذا النموذج الأسيّ يكون مطابقًا للواقع فقط عندما يكون المجتمع محصنًا دون هجرة. وإذا ما سمحنا بمعدل هجرة υ فإنّ الصيغة التفاضلية أعلاه تصبح

$$\frac{dN(t)}{dt} = \lambda N(t) + \upsilon$$

وحلها هو
$$N(t) = N_0 e^{\lambda t} + \frac{v}{\lambda}(e^{\lambda t} - 1)$$

ليكن مجتمع ما بعدد سكان ابتدائي قدره 1,000,000 نسمة، وأن 435,000 مهاجر انضموا إلى هذا المجتمع خلال السنة الأولى، ووُجد في نهاية السنة الأولى أن تعداد المجتمع هذا كان 1,564,000 نسمة. ولتحديد معدل ولادات هذا المجتمع؛ علينا تحديد قيمة λ من الصيغة
$$1{,}564{,}000 = 1{,}000{,}000 e^{\lambda} + \frac{435{,}000}{\lambda}(e^{\lambda} - 1)$$
إن الطرائق العددية التي نقدمها في هذا الباب تستخدم في تقريب الحلول لمثل هذه الصيغ، في الحالات التي يتعذر إيجاد حلول لها بالطرائق الجبرية. وسنتناول حل هذه الصيغة بعينها في التمرين (24) من الفصل (3.2).

1.2 طريقة التنصيف The Bisection Method

سنتناول في هذا الفصل واحدة من المسائل الرئيسة للتقريب العددي، وهي مسألة إيجاد جذور الصيغ. ويتضمن هذا الأسلوب إيجاد جذر أو حل لصيغة بالصيغة $f(x) = 0$، للدّالة f، ويسمّى جذر هذه الصيغة صفرًا للدّالة f أيضًا.

إن مسألة إيجاد تقريب لجذور الصيغة يعود إلى ما قبل العام 1700 قبل الميلاد، فقد كان من ضمن مجموعة Yale البابلية جدول بالرموز المسمارية يعود إلى تلك الحقبة، ويعطي عددًا ذا الأساس 60، ويعادل العدد 1,414222، كقيمة تقريبية للجذر $\sqrt{2}$، وهي تمهيدية تقترب دقتها إلى حد 10^{-5}. ويمكن إيجاد هذا التقريب بتطبيق أسلوب تناولناه في التمرين (19) من الفصل (2.2).

كما يشير اسمها "ثنائية التجزئة"، هو التقسيم (في هذه الحالة هي الفترة) لجزأين (في هذه الحالة متكافئين) اثنين.

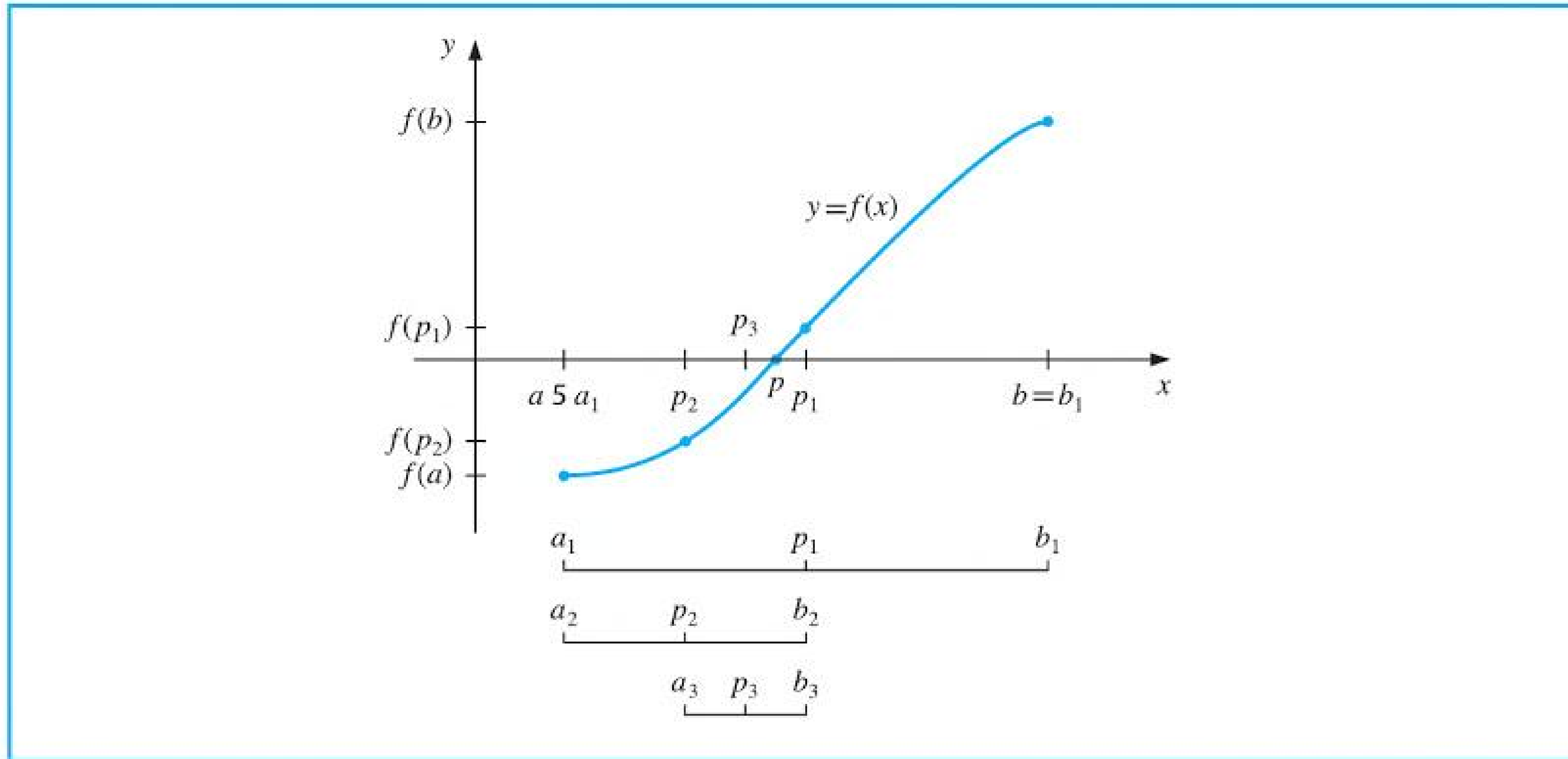
يعتمد الأسلوب الأول على مبرهنة القيمة الوسطية، ويسمّى "طريقة التنصيف". وهنا نفترض أن f تمثّل دالّة متصلة ومعرّفة على الفترة $[a, b]$ مع كون كل من الدّوال $f(a)$ و $f(b)$ ذات إشارة مختلفة. ووفقًا لمبرهنة القيمة الوسطية، فمن المؤكد وجود العدد p في الفترة (a, b) بحيث يكون $f(p) = 0$. وعلى الرغم من أن العملية قائمة على وجود عدد من الجذور يزيد عن واحد في الفترة (a, b) فإنّنا – ولغرض التبسيط – نفترض وحدانية الجذر. وتستدعي الطريقة تكرار تنصيف الفترات الجزئية للفترة $[a, b]$، وتحديد النصف الذي يحتوي p في كل خطوة.

في علم الحاسوب، فإن عملية تقسيم مجموعة باستمرار إلى نصفين للبحث عن حل للمسألة – كما تفعل طريقة التنصيف– تُعرف بأنها عملية البحث الثنائي binary.

ليكن $a_1 = a$ و $b_1 = b$ في البداية، وليمثل p_1 منتصف الفترة $[a, b]$. أي أن
$$p_1 = a_1 + \frac{b_1 - a_1}{2} = \frac{a_1 + b_1}{2}$$
إذا كانت $f(p_1) = 0$ فإنّ $p = p_1$، وبهذا نكون قد انتهينا من الحل. أما إذا كانت $f(p_1) \neq 0$ فإنّ إشارة $f(p_1)$ هي إما إشارة $f(a_1)$ أو إشارة $f(b_1)$. فإذا كانت $f(p_1)$ و $f(a_1)$ لهما الإشارة نفسها، تكون $p \in (p_1, b_1)$ ونعطي القيم $a_2 = p_1$ و $b_2 = b_1$. أمّا إذا كانت $f(p_1)$ و $f(a_1)$ لهما إشارتان مختلفتان، فعندها تكون $p \in (a_1, p_1)$، ونعطي القيم $a_2 = a_1$ و $b_2 = p_1$. وعندئذٍ

نعيد تكرار الخطوة على الفترة $[a_2, b_2]$، وبهذا نحصل على الطريقة الموضحة في الخوارزمية (1.2). (انظر شكل 1.2).

شكل 1.2





التنصيف Bisection

لإيجاد حل لـ $f(x) = 0$ للدالّة f المتصلة على الفترة $[a, b]$ مع اختلاف إشارة $f(a)$ و $f(b)$.

المدخلات: نقاط النهاية a, b الحدود المسموح بها TOL، أكبر عدد لمرات التكرار N_0.

المخرجات: حل تقريبي p أو عبارة "فشل".

الخطوة	المضمون
1	ضع $i = 1$ ، $FA = f(a)$.
2	ما دام $i \le N_0$ فنفّذ الخطوات 3 – 6 الآتية.
3	ضع $p = a + (b - a)/2$ (احسب p_i) $FP = f(p)$.
4	إذا حصل $FP = 0$، أو $(b - a)/2 < TOL$. المُخرج (p) (استكملت العملية بنجاح). توقف.
5	ضع $i = i + 1$.
6	إذا حصل $FA \cdot FP > 0$ فضع $a = p$ (واحسب a_i, b_i)، $FA = FP$ وخلاف ذلك ضع $b = p$.
7	المُخرجات (فشلت الطريقة بعد N_0 من التكرارات و $N_0 =', N_0$) توقف.

■

يمكن تطبيق عمليات إيقاف أخرى في الخطوة (4) من الخوارزمية (1.2) أو في أي أسلوب

تكرار ضمن هذا الباب. ويمكننا على سبيل المثال اختيار حد السماح $\varepsilon > 0$ وتوليد $p_1, \ldots, p_N$ لتحقّق أحد الشروط الآتية:

$$|p_N - p_{N-1}| < \varepsilon \qquad (1.2)$$

$$\frac{|p_N - p_{N-1}|}{|p_N|} < \varepsilon, \quad p_N \neq 0 \qquad (2.2)$$

أو

$$|f(p_N)| < \varepsilon \qquad (3.2)$$

وتجدر الإشارة هنا إلى بعض الصعوبات التي يمكن أن تظهر عند تطبيق أي من قواعد الإيقاف هذه. فعلى سبيل المثال يمكن أن تؤول نهاية المتتالية $\{p_n\}_{n=0}^{\infty}$ مع خاصية الفروقات $p_n - p_{n-1}$ إلى الصفر، حيث ليس للمتتالية نفسها نهاية محدودة. (انظر تمرين 17).
ومن المحتمل أن تقترب $f(p_n)$ من الصفر أيضًا، حيث تختلف p_n منطقيًّا عن p.
(انظر تمرين 16) تعدّ المتباينة (2.2) أفضل قاعدة إيقاف؛ لكونها تقترب من اختبار الخطأ النسبي دون أي معلومات إضافية حول f أو p.

وعند استخدام الحاسوب لتوليد التقريبات؛ فمن الأفضل تحديد الحد الأعلى لعدد مرات التكرار. وهذا من شأنه استبعاد إمكانية إدخال عدد لانهائي من التدويرات، وهي حالة يمكن حدوثها عندما لا يكون للمتتالية نهاية محدودة (عند ترميز البرنامج ترميزًا خطأً أيضًا). وقد تضمنت الخطوة (2) من الخوارزمية (1.2) ذلك، حيث حدَّدنا N_0 مع إيقاف العملية عندما يكون $i > N_0$.

لاحظ أنه عند البدء بخوارزمية التنصيف، يتعين إيجاد الفترة $[a, b]$ مع $f(a) \cdot f(b) < 0$.
ومن المعلوم في كل خطوة أن مدى الفترة المتضمن صفرًا لـِ f ينقص بمقدار 2، لذا يفضل اختيار الفترة الابتدائية $[a, b]$ أصغر ما يمكن. وعلى سبيل المثال إذا كانت $f(x) = 2x^3 - x^2 + x - 1$ يكون لدينا كل من

$$f(-4) \cdot f(4) < 0 \quad \text{و} \quad f(0) \cdot f(1) < 0$$

وبناءً عليه فإنّ خوارزمية التنصيف يمكن استخدامها لأي من الفترتين $[-4, 4]$ أو $[0, 1]$ وعلى أي حال فإنّ استخدام الفترة $[0, 1]$ بدلًا من $[-4, 4]$ سيقلّص عدد مرات التكرار المطلوبة إلى 3 مرات، للوصول إلى الدقة المحددة. ويوضح المثال الآتي خوارزمية التنصيف. وتتوقف عملية التكرار في هذا المثال عندما يكون الخطأ النسبي أقل من 0.0001، أي عندما تكون

$$\frac{|p - p_n|}{|p|} < 10^{-4}$$

مثال 1 الصيغة $f(x) = x^3 + 4x^2 - 10 = 0$ لها جذر ضمن $[1, 2]$؛ لأن $f(1) = -5$ و $f(2) = 14$ وتعطي خوارزمية التنصيف القيم في جدول (1.2). ونلاحظ بعد 13 تكرارًا أن $p_{13} = 1.365112305$ يقرب الجذر p بخطأ مقداره

$$|p - p_{13}| < |b_{14} - a_{14}| = |1.365234375 - 1.365112305| = 0.000122070$$

ولكون $|a_{14}| < |p|$ فإن
$$\frac{|p - p_{13}|}{|p|} < \frac{|b_{14} - a_{14}|}{|a_{14}|} \le 9.0 \times 10^{-5}$$

وبناءً عليه فإنّ التقريب إلى أربع منازل عشرية على الأقل صحيح. والقيمة الصحيحة لـِ p لتسع منازل هي 1.365230013، لاحظ أن p_9 تكون أقرب إلى p من التقريب الأخير p_{13}.

جدول 1.2

$f(p_n)$	p_n	b_n	a_n	n
2.375	1.5	2.0	1.0	1
− 1.79687	1.25	1.5	1.0	2
0.16211	1.375	1.5	1.25	3
− 0.84839	1.3125	1.375	1.25	4
− 0.35098	1.34375	1.375	1.3125	5
− 0.09641	1.359375	1.375	1.34375	6
0.03236	1.3671875	1.375	1.359375	7
− 0.03215	1.36328125	1.3671875	1.359375	8
0.000072	1.365234375	1.3671875	1.36328125	9
− 0.01605	1.364257813	1.365234375	1.36328125	10
− 0.00799	1.364746094	1.365234375	1.364257813	11
− 0.00396	1.364990235	1.365234375	1.364746094	12
− 0.00194	1.365112305	1.365234375	1.364990235	13

قد نستغرب حدوث ذلك؛ لأن $|f(p_{13})| < |f(p_9)|$، ولكن ليس بالإمكان التأكد منه إلا عند معرفة الجواب الصحيح. ■

وعلى الرغم من وضوح مفهوم طريقة التنصيف، إلا أنها تتضمن عيوبًا ملموسة؛ فهي بطيئة في تقاربها (أي أن N قد تكون كبيرة قليلًا قبل الحصول على قيمة صغيرة ملموسة لـِ $|p - p_N|$) بالإضافة إلى إمكانية تجاهل وسيط جيد للمقاربة دون الوقوف عنده. وعلى الرغم من ذلك، فإنّ الطريقة هذه تتسم بالجودة؛ كونها تتقارب إلى حل محدود دائمًا، ولهذا السبب فهي تستخدم بداية في طرائق أخرى أكثر جدوى غالبًا، وسنتناولها في آخر هذا الباب.

مبرهنة 1.2 ليكن $f \in C[a, b]$ و $f(a) \,.\, f(b) < 0$، عندئذ تولد طريقة التنصيف المتتالية $\{p_n\}_{n=1}^{\infty}$ التي تقترب من الجذر p للدّالة f حيث

$$|p_n - p| \leq \frac{b-a}{2^n} \quad \text{عندما} \quad n \geq 1$$ ■

البرهان لكل $n \geq 1$ يكون لدينا

$$b_n - a_n = \frac{1}{2^{n-1}}(b-a) \quad \text{و} \quad p \in (a_n, b_n)$$

وبما أن $p_n = \frac{1}{2}(a_n + b_n)$ لكل $n \geq 1$ فإنّ ذلك يؤدي إلى

$$|p_n - p| \leq \frac{1}{2}(b_n - a_n) = \frac{b-a}{2^n}$$ ■ ■ ■

ولأن

$$|p_n - p| \leq (b-a)\frac{1}{2^n}$$

فإنّ المتتالية $\{p_n\}_{n=1}^{\infty}$ تتقارب نحو p مع معدل تقارب $O(1/2^n)$. أي أن

$$p_n = p + O\left(\frac{1}{2^n}\right)$$

ومن الضروري إدراك أن المبرهنة (1.2) تعطي حدًّا فقط لخطأ التقريب، وربما يكون هذا الحد ليس

دقيقًا بالقدر المطلوب. وقد طُبِّق هذا الحد في مسألة المثال (1) للدلالة على ذلك، ويضمن فقط

$$|p - p_9| \le \frac{2-1}{2^9} \approx 2 \times 10^{-3}$$

حيث إن الخطأ الحقيقي أصغر من ذلك كثيرًا، وهو

$$|p - p_9| = |1.365230013 - 1.365234375| \approx 4.4 \times 10^{-6}$$

مثال 2 لتحديد عدد مرات التكرار الضرورية لحل $f(x) = x^3 + 4x^2 - 10 = 0$ بدقة 10^{-3} وباستخدام $a_1 = 1$ و $b_1 = 2$ يجب إيجاد عدد صحيح N يحقّق

$$|p_N - p| \le 2^{-N}(b-a) = 2^{-N} < 10^{-3}$$

سنستخدم اللوغارتمات لتحديد N. وعلى الرغم من أن اللوغارتمات لأي أساس تفي بالغرض، إلا أننا سنستخدم الأساس 10، ولأن $2^{-N} < 10^{-3}$ تؤدي إلى كون $\log_{10} 2^{-N} < \log_{10} 10^{-3} = -3$ فإنّنا نحتاج إلى أن يكون لدينا

$$-N \log_{10} 2 < -3 \quad \text{ومن ثم} \quad N > \frac{3}{\log_{10} 2} \approx 9.96$$

وبناءً على ذلك، فإنّ 10 تكرارات ستُضمّن بدقة ضمن 10^{-3} تقريبًا، ويظهر الجدول (1.2) أن القيمة $p_9 = 1.365234375$ ضمن 10^{-4} بدقة. ومرة أخرى فإن تحليل الخطأ يعطي حدًّا لعدد مرات التكرار فقط، ومن الضروري أن يُعلم أن هذا الحد يكون في حالات كثيرة أكبر كثيرًا من العدد الحقيقي المطلوب. ■

إن عدد التكرارات في طريقة التنصيف تفترض أن الحسابات تجري باستخدام حساب الخانات غير المنتهية. وعندما تُنفّذ في الحاسبة يتعين عندئذ أخذ تقريب الخطأ في الحسبان. ويتحتم إيجاد حساب نقطة التنصيف للفترة $[a_n, b_n]$ على سبيل المثال وفق الصيغة

$$p_n = a_n + \frac{b_n - a_n}{2}$$

بدلًا من الصيغة الجبرية المكافئة لها

$$p_n = \frac{a_n + b_n}{2}$$

الكلمة اللاتينية **signum** تعني رمز **"token"** أو إشارة **"sign"**، لذا فالاقتران الرمزي يعيد بشكل طبيعي إشارة الرقم (ما لم يكن الرقم صفرًا).

فالصيغة الأولى تضيف تصحيحًا بسيطًا وهو $(b_n - a_n)/2$ للقيمة المعلومة a_n. فعندما تكون $b_n - a_n$ قريبة من الدقة العظمى للآلة فإنّ ثمة خطأً ضمن هذا التصحيح على الرغم من أنه لن يؤثر بوضوح في القيمة المحسوبة لـ p_n. لذا عندما يحدث ذلك فإنّ من الممكن لـ $(b_n - a_n)/2$ تكرار نقطة التنصيف التي لا تكون أصلًا في الفترة $[a_n, b_n]$.

ملحوظة أخيرة، لتحديد أي جزء من الفترة $[a_n, b_n]$ يتضمن الجذر f؛ فمن المستحسن توظيف دالّة Signum التي تعرّف بالآتي:

$$\operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} -1, & \text{if } x < 0 \\ 0, & \text{if } x = 0 \\ 1, & \text{if } x > 0 \end{cases}$$

إن الاختبار سيكون

$\text{sgn}(f(a_n)) \cdot \text{sgn}(f(p_n)) > 0$ بدلًا من $f(a_n) \cdot f(p_n) > 0$

وسيعطي النتائج نفسها، لكنه يتجنب احتمال التضخيم أو التقليص في عملية ضرب $f(a_n)$ و $f(p_n)$.

مجموعة التمارين 1.2 EXERCISE SET

1. استخدم طريقة التنصيف لإيجاد p_3 للدالّة $f(x) = \sqrt{x} - \cos x$ في الفترة $[0, 1]$.
2. ليكن $f(x) = 3(x+1)(x-\frac{1}{2})(x-1)$. استخدم طريقة التنصيف لإيجاد p_3 للفترات الآتية:
   أ. $[-2, 1.5]$ ب. $[-1.25, 2.5]$
3. استخدم طريقة التنصيف لإيجاد حلول دقيقة لحد 10^{-2} للصيغة $x^3 - 7x^2 + 14x - 6 = 0$ وللفترات الآتية:
   أ. $[0, 1]$ ب. $[1, 3.2]$ ج. $[3.2, 4]$
4. استخدم طريقة التنصيف لإيجاد حلول دقيقة لحد 10^{-2} للصيغة $x^4 - 2x^3 - 4x^2 + 4x + 4 = 0$ وللفترات الآتية:
   أ. $[-2, -1]$ ب. $[0, 2]$ ج. $[2, 3]$ د. $[-1, 0]$
5. استخدم طريقة التنصيف لإيجاد حلول دقيقة لحد 10^{-5} للمسائل الآتية:
   أ. $x - 2^{-x} = 0$ لكل $0 \le x \le 1$.
   ب. $e^x - x^2 + 3x - 2 = 0$ لكل $0 \le x \le 1$.
   ج. $2x\cos(2x) - (x+1)^2 = 0$ لكل $-3 \le x \le -2$ و $-1 \le x \le 0$.
   د. $x\cos x - 2x^2 + 3x - 1 = 0$ لكل $0.2 \le x \le 0.3$ و $1.2 \le x \le 1.3$.
6. استخدم طريقة التنصيف لإيجاد حلول دقيقة لحد 10^{-5} للمسائل الآتية:
   أ. $3x - e^x = 0$ لكل $1 \le x \le 2$.
   ب. $x + 3\cos x - e^x = 0$ لكل $0 \le x \le 1$.
   ج. $x^2 - 4x + 4 - \ln x = 0$ لكل $1 \le x \le 2$ و $2 \le x \le 4$.
   د. $x + 1 - 2\sin \pi x = 0$ لكل $0 \le x \le 0.5$ و $0.5 \le x \le 1$.
7. أ. ارسم الشكل $y = x$ و $y = 2\sin x$.
   ب. استخدم طريقة التنصيف لإيجاد حلول دقيقة لحد 10^{-5} لأول قيمة موجبة لـ x حيث $x = 2\sin x$.
8. أ. ارسم الشكل $y = x$ و $y = \tan x$.
   ب. استخدم طريقة التنصيف لإيجاد حلول دقيقة لحد 10^{-5} لأول قيمة موجبة لـ x حيث $x = \tan x$.
9. أ. ارسم الشكل $y = e^x - 2$ و $y = \cos(e^x - 2)$.
   ب. استخدم طريقة التنصيف لإيجاد حلول دقيقة لحد 10^{-5} لقيمة ضمن $[0.5, 1.5]$ حيث $e^x - 2 = \cos(e^x - 2)$.
10. ليكن $f(x) = (x+2)(x+1)^2x(x-1)^3(x-2)$ لأي صفر لـِ f، تتقارب طريقة التنصيف عند تطبيقها على الفترات الآتية:
    أ. $[-1.5, 2.5]$ ب. $[-0.5, 2.4]$ ج. $[-0.5, 3]$ د. $[-3, -0.5]$
11. ليكن $f(x) = (x+2)(x+1)x(x-1)^3(x-2)$ لأي صفر لـِ f، تتقارب طريقة التنصيف عند تطبيقها على الفترات الآتية:
    أ. $[-3, 2.5]$ ب. $[-2.5, 3]$ ج. $[-1.75, 1.5]$ د. $[-1.5, 1.75]$

12. أوجد تقريبًا صحيحًا إلى $\sqrt{3}$ للحد 10^{-4} مستخدمًا خوارزمية التنصيف (افترض $f(x) = x^2 - 3$).

13. أوجد تقريبًا صحيحًا إلى $\sqrt[3]{25}$ للحد 10^{-4} مستخدمًا خوارزمية التنصيف.

14. استخدم المبرهنة (1.2) لإيجاد الحد لعدد التكرارات اللازمة للوصول إلى تقريب بدقة 10^{-3} لحل $x^3 + x - 4 = 0$ واقعًا في الفترة $[1, 4]$. أوجد تقريبًا للجذر بنفس درجة الدقة هذه.

15. استخدم المبرهنة (1.2) لإيجاد الحد لعدد التكرارات اللازمة للوصول إلى تقريب بدقة 10^{-4} لحل $x^3 - x - 1 = 0$ واقعًا في الفترة $[1, 2]$. أوجد تقريبًا للجذر بنفس درجة هذه الدقة.

16. ليكن $f(x) = (x-1)^{10}$، $p = 1$ و $p_n = 1 + 1/n$. أثبت أن $|f(p_n)| < 10^{-3}$ عندما $n > 1$ ولكن $|p - p_n| < 10^{-3}$ يتطلب كون $n > 1000$.

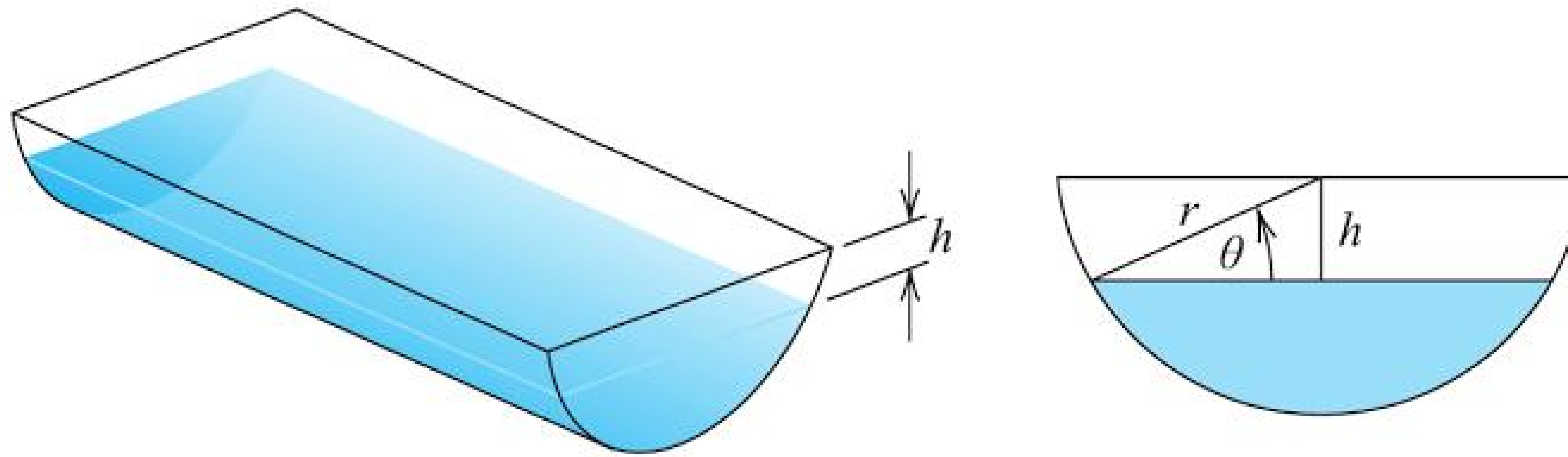
17. ليكن $\{p_n\}$ عبارة عن متتالية معرفة بـ $p_n = \sum_{k=1}^{n}(1/k)$. أثبت أن $\{p_n\}$ غير متقاربة حتى لو كان $\lim_{n\to\infty}(p_n - p_{n-1}) = 0$.

18. تتضمن الدّالة $f(x) = \sin \pi x$ أصفارًا عند كل عدد صحيح. أثبت أنه عندما تكون $-1 < a < 0$ و $2 < b < 3$، فإنّ طريقة التنصيف تتقارب إلى:

أ. 0 إذا كان $a + b < 2$ ب. 2 إذا كان $a + b > 2$ أ. 1 إذا كان $a + b = 2$

19. حوض بطول L له مقطع على شكل نصف دائرة قطرها r (انظر شكل)، وعند ملئه بالماء لغاية البعد h عن السطح العلوي فإنّ حجم الماء يكون

$$V = L\left[0.5\pi r^2 - r^2 \arcsin\left(\frac{h}{r}\right) - h(r^2 - h^2)^{1/2}\right]$$

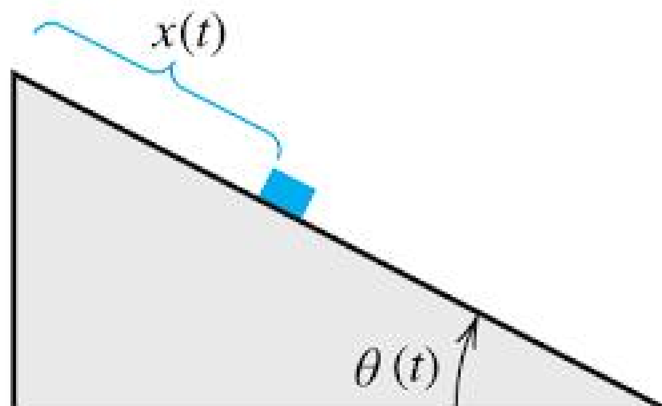


ليكن $L = 10$ ft، $r = 1$ ft و $V = 12.4$ ft^3. أوجد عمق الماء في الحوض لحد 0.01 ft.

20. بدأ جسم بالحركة من السكون على سطح مائل (انظر شكل) بزاوية θ، ويتغير بمعدل ثابت $\frac{d\theta}{dt} = \omega < 0$ ومع نهاية t من الثواني، فإنّ موقع الجسم يكون

$$x(t) = -\frac{g}{2\omega^2}\left(\frac{e^{\omega t} - e^{-\omega t}}{2} - \sin \omega t\right)$$

ليكن الجسم قد تحرك 1.7 ft في 1 s. أوجد ضمن 10^{-5} المعدل ω الذي تتغير عنده θ. ليكن $g = 32.17$ ft/s^2.



2.2 تكرار النقطة الثابتة Fixed – Point Iteration

نتائج النقطة الثابتة تظهر في مجالات رياضية عديدة، وهي أدوات رئيسة للاقتصاديين لبرهنة نتائج تتعلق بالتوازن equilibria، وعلى بالرغم من كون فكرة الأسلوب قديمة، فإن المصطلح قد استخدم للمرة الأولى من قبل الرياضي الهولندي براور (1881 – 1966) L. E. J. brouwer في بداية الحقبة 1900.

العدد p هو نقطة ثابتة للدالّة g إذا كانت $g(p) = p$. سنناقش في هذا الفصل مسألة إيجاد حلول لمسائل النقطة الثابتة وعلاقة ذلك بمسائل إيجاد الجذر التي نرغب في حلها، ومسائل كلا الحالتين فئات متكافئة من حيث المعطيات الآتية:

- في مسألة إيجاد الجذر $f(p) = 0$، نستطيع تعريف الدّوال g بنقطة ثابتة عند p بعدة طرائق، ومثال ذلك عندما $g(x) = x - f(x)$ أو $g(x) = x + 3f(x)$.
- وبالعكس، إذا كان للدالّة g نقطة ثابتة عند p، فإنّ للدالّة $f(x) = x - g(x)$ صفرًا عند p.

وعلى الرغم من أن المسائل التي نرغب في حلها تكون بصيغة إيجاد الجذر، فإنّ صيغة النقطة الثابتة أسهل من حيث التحليل، وثمة اختيارات قوية جدًّا للنقطة الثابتة تؤدي إلى أساليب إيجاد الجذر.

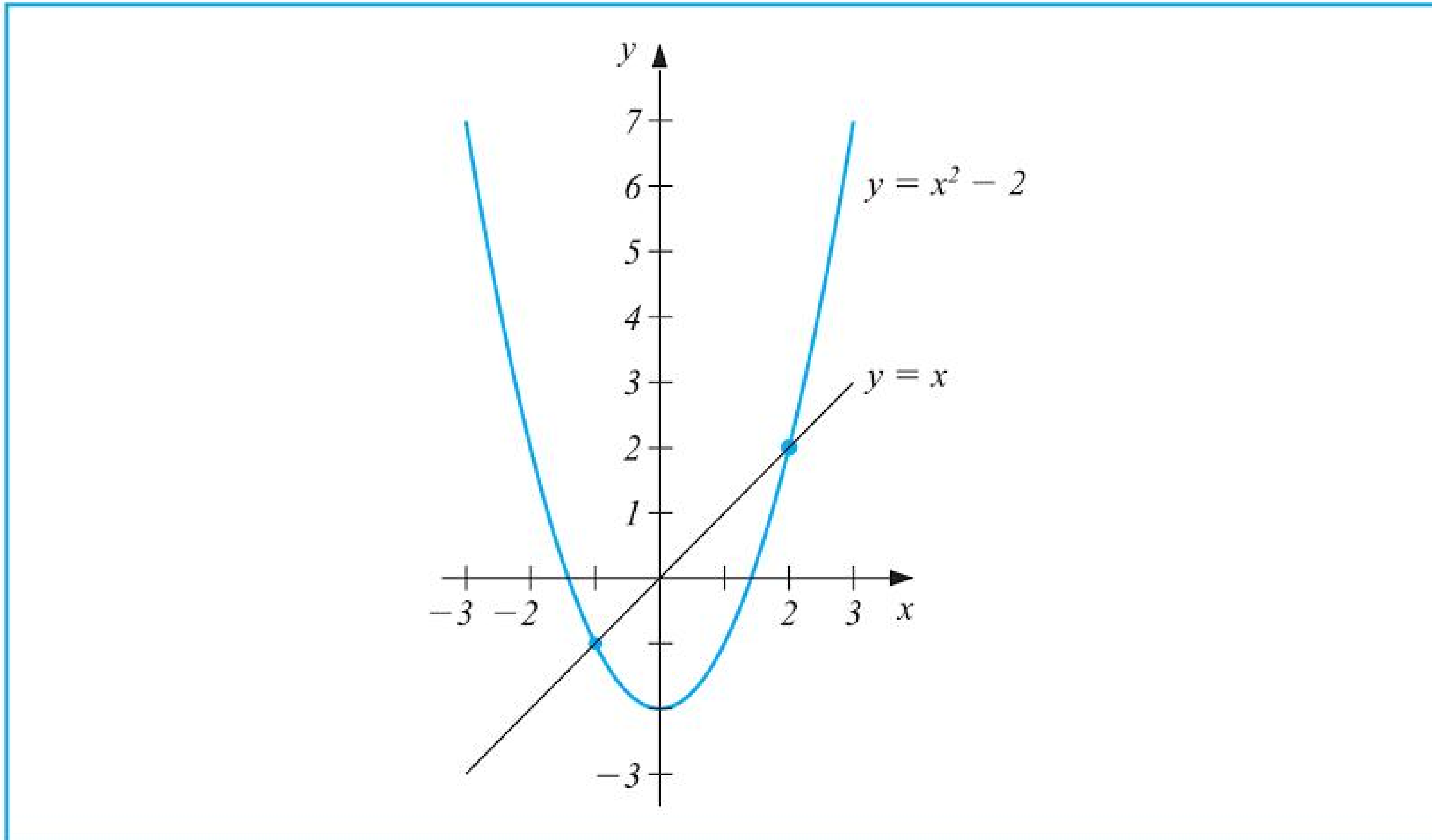
نحتاج في البداية إلى أن نطمئن لهذا النوع الجديد من المسائل، ثم نقرر متى يكون للدالّة نقطة ثابتة، وكيف يمكن تقريب النقاط الثابتة ضمن دقة محددة.

مثال 1 للدالّة $g(x) = x^2 - 2$ لكل $-2 \le x \le 3$ نقاط ثابتة عند $x = -1$ و $x = 2$ بما أن

$$g(2) = 2^2 - 2 = 2 \quad و \quad g(-1) = (-1)^2 - 2 = -1$$

ويمكن ملاحظة هذا في شكل (2.2).

شكل 2.2

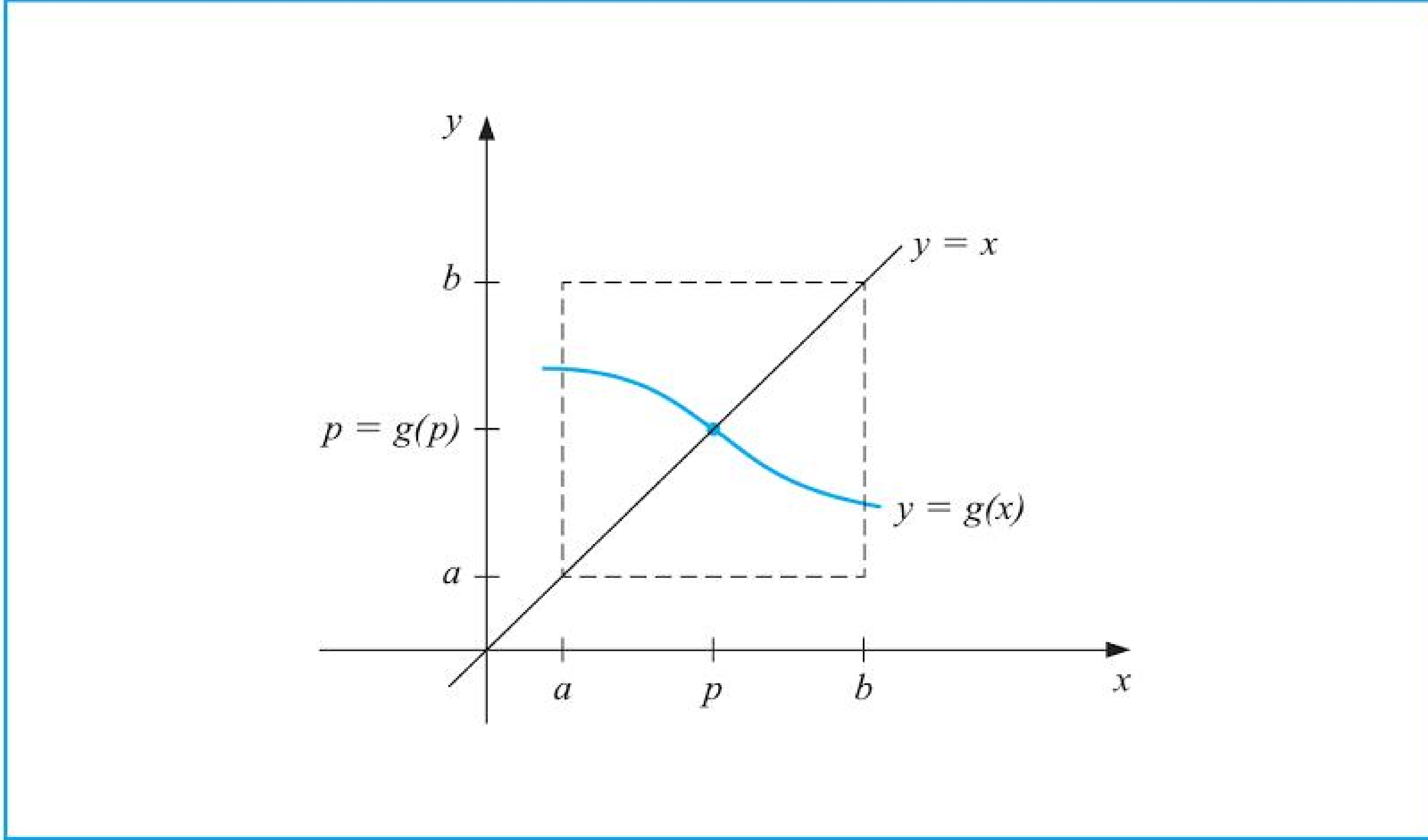


تحقّق المبرهنة الآتية حالات مناسبة لوجود النقطة الثابتة ووحدانيتها.

مبرهنة 2.2
أ. إذا كانت $g \in C[a, b]$ و $g(x) \in [a, b]$ لكل $x \in [a, b]$ فيوجد للدّالة g نقطة ثابتة في $[a, b]$.
ب. وبالإضافة إلى ذلك، إذا كانت $g'(x)$ موجودة في (a, b)، ويوجد ثابت موجب $k < 1$ حيث $|g'(x)| \leq k$ لكل $x \in (a, b)$ فإنّ النقطة الثابتة في $[a, b]$ تكون وحيدة. ■

(انظر شكل 3.2).

شكل 3.2



البرهان

أ. إذا كان $g(a) = a$ أو $g(b) = b$ فإنّ للدّالة g نقطة ثابتة في طرف الفترة. وخلاف ذلك فإنّ $g(a) > a$ و $g(b) < b$. الدّالة $h(x) = g(x) - x$ متصلة ضمن $[a, b]$، مع $h(a) = g(a) - a > 0$ و $h(b) = g(b) - b < 0$. واستناداً إلى مبرهنة القيمة الوسطية، توجد $p \in (a, b)$ تحقق $h(p) = 0$. هذا العدد p هو نقطة ثابتة للدّالة g، لأن

$0 = h(p) = g(p) - p$ تؤدي إلى $g(p) = p$.

ب. بالإضافة إلى ذلك، ليكن $|g'(x)| \leq k < 1$، وإن p و q كليهما نقطة ثابتة في $[a, b]$. وإذا كان $p \neq q$ فإنّ مبرهنة القيمة الوسيطية تضمن لنا وجود عدد (p, q) ξ وفق القيم في $[a, b]$ حيث

$$\frac{g(p) - g(q)}{p - q} = g'(\xi)$$

إذن

$$|p - q| = |g(p) - g(q)| = |g'(\xi)||p - q| \leq k|p - q| < |p - q|$$

وهذا تناقض. ومصدر هذا التناقض افتراض $p \neq q$. إذن $p = q$ وتكون النقطة الثابتة في $[a, b]$ وحيدة. ■ ■ ■

مثال 2

أ. ليكن $g(x) = (x^2 - 1)/3$ في الفترة $[-1, 1]$. تفيد مبرهنة القيمة المتطرفة في ظهور الحد الأدنى المطلق للدالّة g عندما $x = 0$ و $g(0) = -\frac{1}{3}$. وإن الحد الأعلى المطلق للدالّة g يظهر عند $x = \pm 1$ أيضًا، وله قيمة $g(\pm 1) = 0$. بالإضافة إلى ذلك، فإنّ الدالّة g متصلة أيضًا، وإن

$$|g'(x)| = \left|\frac{2x}{3}\right| \leq \frac{2}{3} \quad \text{لكل} \quad x \in (-1, 1)$$

وإنّ الدّالــة g تحقّــق عندئــذ فرضيات المبرهنــة (2.2) جميعها، ولها نقطــة ثابتة وحيدة ضمن $[-1, 1]$ وإن النقطة الثابتة الوحيدة p في الفترة $[-1, 1]$ يمكن تحديدها جبريًّا في هذا المثال. فإذا كان

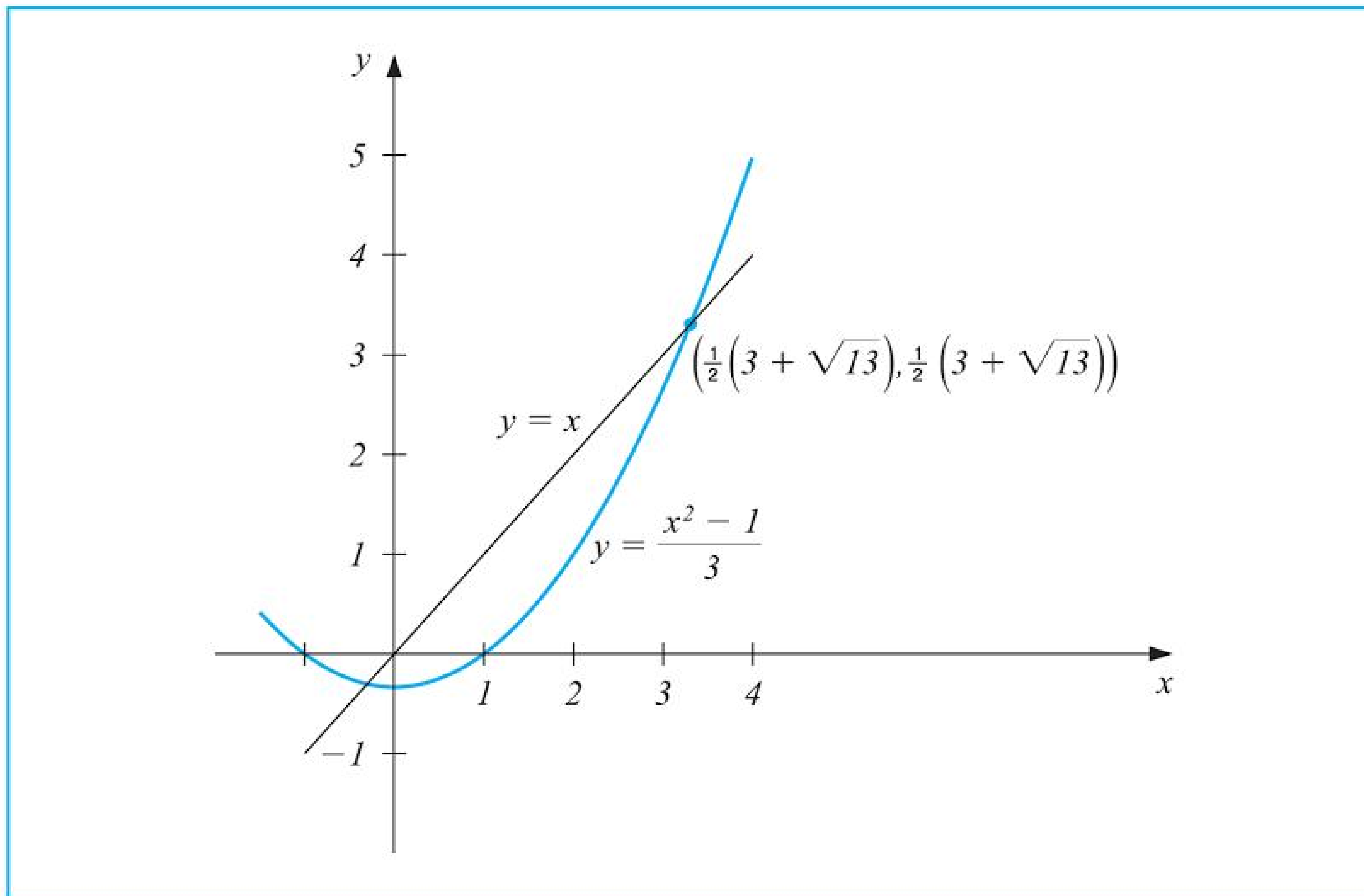
$$p = g(p) = \frac{p^2 - 1}{3} \quad \text{ثم} \quad p^2 - 3p - 1 = 0$$

التي تعطي بحسب الصيغة التربيعية

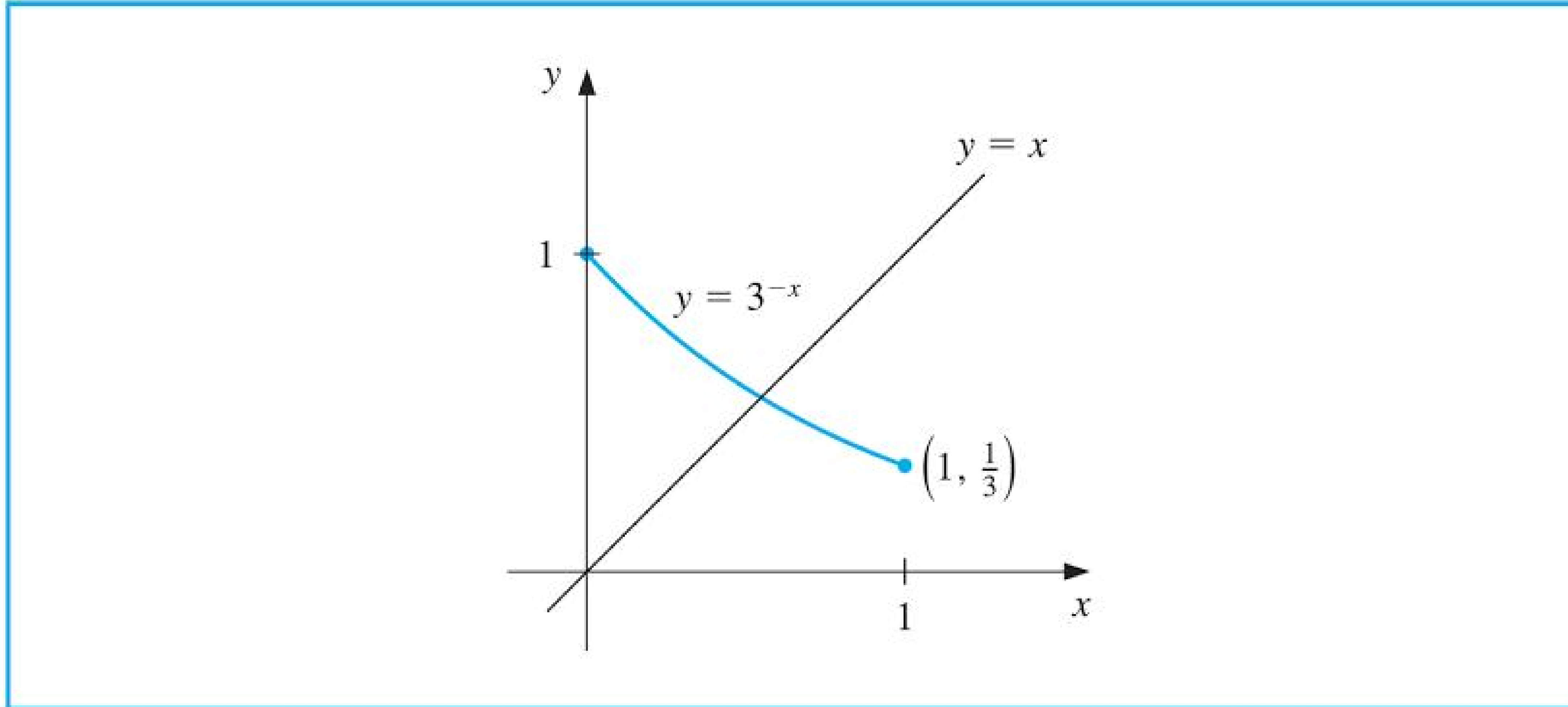
$$p = \frac{1}{2}(3 - \sqrt{13})$$

لاحظ أن للدالّة g نقطة ثابتة وحيدة أيضًا هي $p = \frac{1}{2}(3 + \sqrt{13})$ للفترة $[3, 4]$. وعلى أي حال $g(4) = 5$ و $g'(4) = \frac{8}{3} > 1$، بناءً عليه فإنّ الدّالة g لا تحقّق فرضيات المبرهنة (2.2) عند $[3, 4]$. وعندئذ فإنّ فرضيات المبرهنة (2.2) كافية لضمان نقطة ثابتة وحيدة لكنها غير ضرورية. (انظر شكل 4.2).

شكل 4.2



شكل 5.2



ب. ليكن $g(x) = 3^{-x}$. بما أن $g'(x) = -3^{-x}\ln 3 < 0$ في $[0, 1]$، فإنّ الدّالة g متناقصة على $[0, 1]$. من ثم

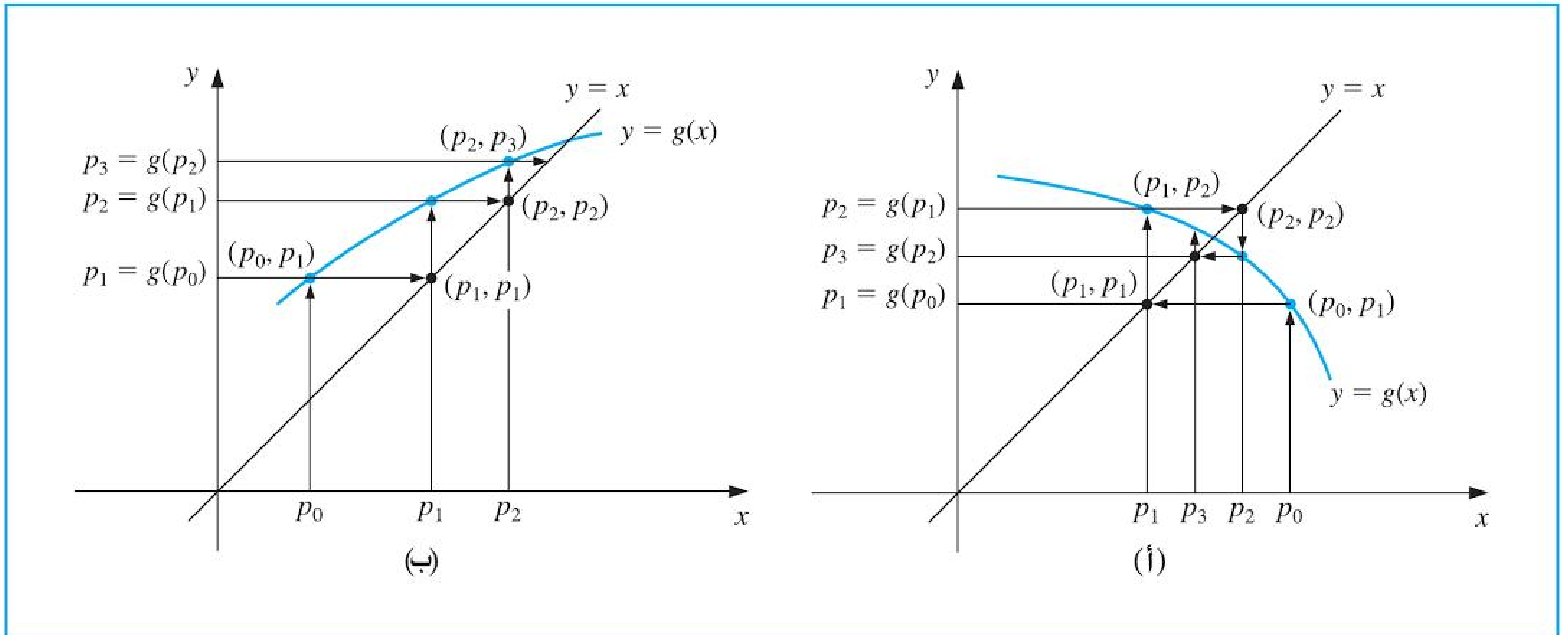
$$g(1) = \frac{1}{3} \le g(x) \le 1 = g(0) \quad \text{لكل} \quad 0 \le x \le 1$$

عندئذ إذا كان $x \in [0, 1]$ فإن $g(x) \in [0, 1]$، وللدّالة g نقطة ثابتة في $[0, 1]$. حيث

$$g'(0) = -\ln 3 = -1.098612289$$

و $|g'(x)| \nleq 1$ في $(0, 1)$، وأن المبرهنة (2.2) لا يمكن استخدامها لتحديد الوحدانية، فإن الدّالة g متناقصة دائمًا، ويتضح من شكل (5.2) حتمية كون النقطة الثابتة وحيدة. ■

شكل 5.2



نختار تقريبًا ابتدائيًّا p_0 وتوليد المتتالية $\{p_n\}_{n=0}^{\infty}$ بجعل $p_n = g(p_{n-1})$ لكل $n \geq 1$ لتقريب النقطة الثابتة للدّالة g. وإذا تقاربت المتتالية إلى p و g متصلة فإنّ

$$p = \lim_{n\to\infty} p_n = \lim_{n\to\infty} g(p_{n-1}) = g\left(\lim_{n\to\infty} p_{n-1}\right) = g(p)$$

وسيوجد حل لـ $x = g(x)$. ويسمى هذا الأسلوب "تكرار النقطة الثابتة" أو "التكرار الداليّة". والعملية مفصلة في الخوارزمية (2.2) وموضحة في شكل (6.2).



تكرار النقطة الثابتة Fixed-Point Iteration

لإيجاد حل لـ $p = g(p)$ بوجود التقريب الابتدائي p_0؛

المدخلات: تقريب ابتدائي p_0، الحدود المسموح بها TOL، أكبر عدد لمرات التكرار N_0.

المخرجات: حل تقريبي p أو عبارة (فشل).

الخطوة	المضمون
1	ضع $i = 1$.
2	ما دام $i \leq N_0$ فنفّذ الخطوات 3 – 6 الآتية.
3	ضع $p = g(p_0)$ (احسب p_i).
4	إذا كان $\lvert p - p_0 \rvert < TOL$ فالمخرج (استكملت العملية بنجاح). توقف.
5	ضع $i = i + 1$.
6	ضع $p_0 = p$ (تحديث p_0).
7	المُخرجات (فشلت الطريقة بعد N_0 من التكرارات و N_0 ,' = N_0) توقف.

■

ويوضح المثال الآتي التكرارت الدّالية.

مثال 3 الصيغة $x^3 + 4x^2 - 10 = 0$ لها جذر وحيد في $[1, 2]$. وتوجد عدة طرائق لتغيير الصيغة إلى صيغة النقطة الثابتة $x = g(x)$ مستخدمين ترتيبًا جبريًّا بسيطًا. فلإيجاد الدّالة g الموضح في الفقرة (ج) على سبيل المثال؛ نستطيع ترتيب الصيغة $x^3 + 4x^2 - 10 = 0$ على النحو الآتي:

$$4x^2 = 10 - x^3 \quad \text{ولذلك} \quad x^2 = \tfrac{1}{4}(10 - x^3) \quad \text{و} \quad x = \pm\, \tfrac{1}{2}(10 - x^3)^{1/2}$$

ولإيجاد حل موجب؛ نختار $g_3(x)$. وليس من الضروري اشتقاق الدّوال المبينة هنا، لكن عليك التأكد من أن النقطة الثابتة لكل منها هي في الواقع حل للصيغة الأصلية $x^3 + 4x^2 - 10 = 0$.

أ. $x = g_1(x) = x - x^3 - 4x^2 + 10$.

ب.

$$x = g_2(x) = \left(\frac{10}{x} - 4x\right)^{1/2}$$

ج. $x = g_3(x) = \frac{1}{2}(10 - x^3)^{1/2}$.

د. $x = g_4(x) = \left(\frac{10}{4+x}\right)^{1/2}$

هـ. $x = g_5(x) = x - \frac{x^3 + 4x^2 - 10}{3x^2 + 8x}$

وعند $p_0 = 1.5$، يبين جدول (2.2) نتائج تكرار النقطة الثابتة لكل الخيارات الخمسة للدالّة g. الجذر الحقيقي هو 1.365230013 كما لوحظ في المثال (1) من الفصل (1.2). وبمقارنة نتائج خوارزمية التنصيف المعطاة ضمن ذلك المثال، يمكن ملاحظة النتائج الرائعة للاختيارات (ج)، (د)، (هـ) حيث تتطلب طريقة التنصيف 27 تكرارًا لهذه الدقّة. ولعله من المفيد ملاحظة أن الاختيار (أ) كان غير متقارب، وأن (ب) كان غير معرّف بسبب احتوائه على جذر تربيعي لعدد سالب. ■

جدول 2.2

n	(أ)	(ب)	(ج)	(د)	(هـ)
0	1.5	1.5	1.5	1.5	1.5
1	−0.875	0.8165	1.286953768	1.348399725	1.373333333
2	6.732	2.9969	1.402540804	1.367376372	1.365262015
3	−469.7	$(-8.65)^{1/2}$	1.345458374	1.364957015	1.365230014
4	1.03×10^8		1.375170253	1.365264748	1.365230013
5			1.360094193	1.365225594	
6			1.367846968	1.365230576	
7			1.363887004	1.365229942	
8			1.365916734	1.365230022	
9			1.364878217	1.365230012	
10			1.365410062	1.365230014	
15			1.365223680	1.365230013	
20			1.365230236		
25			1.365230006		
30			1.365230013		

ومع أن دوالّ مختلفة في المثال (3) هي مسائل النقطة الثابتة لمسألة إيجاد الجذر نفسها، إلا أنها تختلف إلى حد كبير بوصفها أساليب لتقريب حل مسألة إيجاد الجذر. والغرض منه إيضاح أن السؤال الحقيقي الذي يتطلب الإجابة هو:

- كيف يمكننا إيجاد مسألة النقطة الثابتة التي تنتج متتالية تتقارب على نحو موثوق ومتكرر لحل مسألة إيجاد الجذر؟

تعطينا المبرهنة الآتية ونتيجتها بعض المفاتيح بشأن المسارات التي يتعين علينا سلوكها، وربما يُعدّ رفضنا لبعض منها أكثر أهمية.

مبرهنة 3.2 مبرهنة النقطة الثابتة Fixed-Point Theorem

ليكن $g \in C[a, b]$ حيث $g(x) \in [a, b]$ لكل قيم x في $[a, b]$. وبالإضافة إلى ذلك، لتكن الدالّة g' موجودة في (a, b) وأن ثابت $0 < k < 1$ موجود مع

$$|g'(x)| \le k \quad \text{لكل} \quad x \in (a, b)$$

لذا لأي عدد p_0 ضمن $[a, b]$، فإنّ المتتالية

$$p_n = g(p_{n-1}) \quad \text{لكل} \quad n \geq 1$$

تتقارب إلى نقطة ثابتة وحيدة p ضمن $[a, b]$. ■

البرهان تشير المبرهنة (2.2) إلى أن النقطة الثابتة الوحيدة موجودة ضمن $[a, b]$. حيث إن الدّالة g تنقل $[a, b]$ إلى نفسها، فإنّ المتتالية $\{p_n\}_{n=0}^{\infty}$ معرّفة لكل $n \geq 0$، و $p_n \in [a, b]$ لكل n وباستخدام مبرهنة القيمة الوسطية، وحقيقة كون $|g'(x)| \leq k$، يكون لدينا لكل n

$$|p_n - p| = |g(p_{n-1}) - g(p)| = |g'(\xi_n)||p_{n-1} - p| \leq k|p_{n-1} - p|$$

حيث إن $\xi_n \in (a, b)$ وبتطبيق هذه المتباينة نستنتج أن

$$|p_n - p| \leq k|p_{n-1} - p| \leq k^2|p_{n-2} - p| \leq \cdots \leq k^n|p_0 - p| \qquad (4.2)$$

وحيث إن $0 < k < 1$ يكون لدينا $\lim_{n\to\infty} k^n = 0$ و

$$\lim_{n\to\infty} |p_n - p| \leq \lim_{n\to\infty} k^n|p_0 - p| = 0$$

ومن ثم فإنّ $\{p_n\}_{n=0}^{\infty}$ تتقارب إلى p. ■ ■ ■

تمهيدية 4.2 إذا كانت الدّالة g تحقّق فرضيات المبرهنة (3.2) فإنّ حدود الخطأ ضمن استخدام p_n لتقريب p هي

$$|p_n - p| \leq k^n \max\{p_0 - a, b - p_0\}$$

و

$$|p_n - p| \leq \frac{k^n}{1 - k}|p_1 - p_0| \quad \text{لكل} \quad n \geq 1$$ ■

البرهان حيث $p \in [a, b]$، فإنّ الحد الأول الناتج من المتباينة (4.2) هو

$$|p_n - p| \leq k^n|p_0 - p| \leq k^n \max\{p_0 - a, b - p_0\}$$

وعندما $n \geq 1$، فإنّ العملية المستخدمة في برهنة المبرهنة (3.2) تعطي

$$|p_{n+1} - p_n| = |g(p_n) - g(p_{n-1})| \leq k|p_n - p_{n-1}| \leq \cdots \leq k^n|p_1 - p_0|$$

ومن ثم عندما $m > n \geq 1$ يكون

$$\begin{aligned}
|p_m - p_n| &= |p_m - p_{m-1} + p_{m-1} - \cdots + p_{n+1} - p_n| \\
&\leq |p_m - p_{m-1}| + |p_{m-1} - p_{m-2}| + \cdots + |p_{n+1} - p_n| \\
&\leq k^{m-1}|p_1 - p_0| + k^{m-2}|p_1 - p_0| + \cdots + k^n|p_1 - p_0| \\
&= k^n|p_1 - p_0|(1 + k + k^2 + \cdots + k^{m-n-1})
\end{aligned}$$

واستنادًا إلى المبرهنة (3.2) $\lim_{m\to\infty} p_m = p$، وبهذا نجد

$$|p - p_n| = \lim_{m\to\infty} |p_m - p_n| \le \lim_{m\to\infty} k^n |p_1 - p_0| \sum_{i=0}^{m-n-1} k^i \le k^n |p_1 - p_0| \sum_{i=0}^{\infty} k^i$$

لكن $\sum_{i=0}^{\infty} k^i$ سلسلة هندسية بنسبة مشتركة k و $0 < k < 1$. وهذه المتتالية تتقارب إلى $1/(1-k)$ الذي يعطي الحد الثاني

$$|p - p_n| \le \frac{k^n}{1-k} |p_1 - p_0|$$

■ ■ ■

تربط المتباينتان كلتاهما في هذه التمهيدية معدل تقارب $\{p_n\}_{n=0}^{\infty}$ للحد k بالمشتقة الأولى، وإن معدل التقارب يعتمد على العامل k^n، فكلما كانت قيمة k صغيرة كان التقارب أسرع، ويكون بطيئًا جدًّا عندما تقترب k من 1. وأعيد في المثال الآتي اعتماد طرائق النقطة الثابتة المستخدمة في المثال (3.2) في ضوء النتائج المبينة في المبرهنة (3.2) ونتيجتها.

مثال 4

أ. مع $g_1(x) = x - x^3 - 4x^2 + 10$، لدينا $g_1(1) = 6$ و $g_1(2) = -12$، لذا فالدّالة g_1 لا تنقل $[1, 2]$ إلى نفسها. وأكثر من ذلك $g_1'(x) = 1 - 3x^2 - 8x$، ومن ثم فإن $|g_1'(x)| > 1$ لكل x ضمن $[1, 2]$. وعلى الرغم من أن المبرهنة (3.2) لا تضمن فشل الطريقة عند هذا الاختيار للدّالة g، فلا يوجد سبب لتوقع حصول التقارب.

ب. مع $g_2(x) = [(10/x) - 4x]^{1/2}$، يمكن أن نرى الدّالة g_2 لا تنقل $[1, 2]$ إلى نفسها، وأن المتتالية $\{p_n\}_{n=0}^{\infty}$ غير معرّفة عندما $p_0 = 1.5$. وأكثر من ذلك، لا توجد فترة تحتوي $p \approx 1.365$ بحيث

$$|g_2'(x)| < 1 \quad \text{لأن} \quad |g_2'(p)| \approx 3.4$$

ولا يوجد أي مبرر لنتوقع أن هذه الطريقة ستتقارب.

ج. للدالّة $g_3(x) = \frac{1}{2}(10 - x^3)^{1/2}$

$$g_3'(x) = -\frac{3}{4}x^2(10 - x^3)^{-1/2} < 0 \quad \text{في الفترة } [1, 2]$$

لذا g_3 متناقصة حتمًا ضمن $[1, 2]$. وعلى أي حال $|g_3'(2)| \approx 2.12$، لذا فإنّ الشرط $|g_3'(x)| \le k < 1$ يقع ضمن $[1, 2]$. وعند التمعن في المتتالية $\{p_n\}_{n=0}^{\infty}$ بدءًا بـ $p_0 = 1.5$ نجد أن افتراض الفترة $[1, 1.5]$ بدلًا من $[1, 2]$ كافيًا. ضمن هذه الفترة، ما زال صحيحًا كون $g_3'(x) < 0$ و g_3 متناقصة حتمًا، لكن أيضًا

$$1 < 1.28 \approx g_3(1.5) \le g_3(x) \le g_3(1) = 1.5$$

لكل $x \in [1, 1.5]$. وهذا يرينا أن g_3 تنقل الفترة $[1, 1.5]$ إلى نفسها. ولكون $|g_3'(x)| \le |g_3'(1.5)| \approx 0.66$ صحيحًا أيضًا ضمن هذه الفترة؛ فإنّ المبرهنة (3.2) تؤكد التقارب الذي نحن بصدده.

د. مع $g_4(x) = (10/(4 + x))^{1/2}$، يكون لدينا

$$|g_4'(x)| = \left|\frac{-5}{\sqrt{10}(4 + x)^{3/2}}\right| \le \frac{5}{\sqrt{10}(5)^{3/2}} < 0.15 \quad \text{لكل } x \in [1, 2].$$

والحد على المقدار $g_4'(x)$ أقل كثيرًا من الحد الذي ظهر في (د) على المقدار $g_3'(x)$ الذي يفسر

تقاربًا أكثر تسارعًا باستخدام g_4.

هـ. المتتالية أدناه $g_5(x) = x - \dfrac{x^3 + 4x^2 - 10}{3x^2 + 8x}$

تتقارب بسرعة أكثر مما هي عليه عند اختياراتنا الأخرى، وسنرى في البنود الآتية من أين جاء هذا الاختيار والسبب وراء فاعليته هذه. ■

EXERCISE SET — مجموعة التمارين 2.2

1. استخدم المعالجة الجبرية لإثبات أن لكل من الدّوال الآتية نقطة ثابتة عند p تحديدًا عندما $f(p) = 0$، حيث $f(x) = x^4 + 2x^2 - x - 3$:

أ. $g_1(x) = (3 + x - 2x^2)^{1/4}$ ب. $g_2(x) = \left(\dfrac{x + 3 - x^4}{2}\right)^{1/2}$

ج. $g_3(x) = \left(\dfrac{x + 3}{x^2 + 2}\right)^{1/2}$ د. $g_4(x) = \dfrac{3x^4 + 2x^2 + 3}{4x^3 + 4x - 1}$

2. أ. نفّذ أربعة تكرارات إذا أمكن على كل دالّة g ذكرت في التمرين (1) أعلاه. وليكن $p_0 = 1$ و $p_{n+1} = g(p_n)$ لكل $n = 0, 1, 2, 3$.

ب. أي من هذه الدّوال تعطي أفضل تقريب للحل؟

3. استخدم الطرائق الأربع الآتية لحساب $21^{1/3}$، ورتّبها بحسب سرعة التقارب لكل منها عندما يكون $p_0 = 1$:

أ. $p_n = \dfrac{20p_{n-1} + 21/p_{n-1}^2}{21}$ ب. $p_n = p_{n-1} - \dfrac{p_{n-1}^3 - 21}{3p_{n-1}^2}$

ج. $p_n = p_{n-1} - \dfrac{p_{n-1}^4 - 21p_{n-1}}{p_{n-1}^2 - 21}$ د. $p_n = \left(\dfrac{21}{p_{n-1}}\right)^{1/2}$

4. استخدم الطرائق الأربع الآتية لحساب $7^{1/5}$، ورتّبها بحسب سرعة التقارب لكل منها عندما يكون:

أ. $p_n = p_{n-1}\left(1 + \dfrac{7 - p_{n-1}^5}{p_{n-1}^2}\right)^3$ ب. $p_n = p_{n-1} - \dfrac{p_{n-1}^5 - 7}{p_{n-1}^2}$

ج. $p_n = p_{n-1} - \dfrac{p_{n-1}^5 - 7}{5p_{n-1}^4}$ د. $p_n = p_{n-1} - \dfrac{p_{n-1}^5 - 7}{12}$

5. استخدم طريقة تكرار النقطة الثابتة لتحديد حل بدقة 10^{-2} لـ $x^4 - 3x^2 - 3 = 0$ في $[1, 2]$. استخدم $p_0 = 1$.

6. استخدم طريقة تكرار النقطة الثابتة لتحديد حل بدقة 10^{-2} لـ $x^3 - x - 1 = 0$ في $[1, 2]$. استخدم $p_0 = 1$. $[0, 2\pi]$

7. استخدم المبرهنة (2.2) لإثبات أن $g(x) = \pi + 0.5\sin(x/2)$ لها نقطة ثابتة وحيدة في $[0, 2\pi]$. استخدم تكرار النقطة الثابتة لإيجاد تقريب للنقطة الثابتة بدقة 10^{-2}. استخدم التمهيدية (4.2) لتقدير عدد مرات التكرار المطلوبة لتحقيق هذه الدقة، ثم قارن هذا التقدير النظري بالعدد الفعلي المطلوب.

8. استخدم المبرهنة (2.2) لإثبات أن $g(x) = 2^{-x}$ لها نقطة ثابتة وحيدة في $[\frac{1}{3}, 1]$. استخدم تكرار النقطة الثابتة لإيجاد تقريب للنقطة الثابتة بدقة 10^{-4}. استخدم التمهيدية (4.2) لتقدير عدد

التكرارات المطلوبة لتحقيق هذه الدقة 10^{-4}، ثم قارن هذا التقدير النظري بالعدد الفعلي المطلوب.

9. استخدم طريقة تكرار النقطة الثابتة لإيجاد التقريب إلى $\sqrt{3}$ بدقة 10^{-4}. قارن هذه التمهيدية وعدد التكرارت المطلوبة بإجابة التمرين (10) من الفصل (1.2).

10. استخدم طريقة تكرار النقطة الثابتة لإيجاد التقريب إلى $\sqrt[3]{25}$ بدقة 10^{-4}. قارن هذه التمهيدية وعدد التكرارت المطلوبة بإجابة التمرين (11) من الفصل (1.2).

11. حدِّد الفترة $[a, b]$ التي يتقارب عندها التكرار بالنقطة الثابتة لكل من الصيغ الآتية:
أ. قدّر عدد التكرارت المطلوبة لتحقيق التقريبات بدقة 10^{-5}.
ب. نفّذ الحسابات.

أ. $x = \dfrac{2 - e^x + x^2}{3}$ ب. $x = \dfrac{5}{x^2} + 2$ ج. $x = \left(\dfrac{e^x}{3}\right)^{1/2}$

ج. $x = 5^{-x}$ د. $x = 6^{-x}$ هـ. $x = 0.5(\sin x + \cos x)$

12. استخدم الفترة المعطاة لكلٍ من الصيغ الآتية، أو حدِّد الفترة $[a, b]$ التي يتقارب عندها التكرار بالنقطة الثابتة:
أ. قدّر عدد التكرارت المطلوبة لتحقيق التقريبات بدقة 10^{-5}.
ب. نفّذ الحسابات.

أ. $2 + \sin x - x = 0$ باستخدام $[2, 3]$ ب. $x^3 - 2x - 5 = 0$ باستخدم $[2, 3]$

ج. $3x^2 - e^x = 0$ د. $x - \cos x = 0$

13. أوجد الأصفار كلها لـ $f(x) = x^2 + 10\cos x$ باستخدام تكرار النقطة الثابتة لدالّة التكرار المناسب g. أوجد الأصفار بدقّة 10^{-4}.

14. استخدم طريقة تكرار بالنقطة الثابتة لتحديد حل بدقة 10^{-4} لـ $x = \tan x$ لـ x ضمن $[4, 5]$.

15. استخدم طريقة تكرار بالنقطة الثابتة لتحديد حل بدقة 10^{-2} لـ $2\sin \pi x + x = 0$ لـ x ضمن $[1, 2]$. استخدم $p_0 = 1$.

16. ليكن A ثابتًا موجبًا و $g(x) = 2x - Ax^2$:
أ. أثبت أنه في حالة تقارب تكرار النقطة الثابتة لحدٍ ليس صفرًا، فإنّ الحد هو $p = 1/A$، ويمكن أخيرًا إيجاد معكوس العدد باستخدام عمليات الضرب والطرح فقط.
ب. أوجد فترة حول $1/A$ يتقارب عندها تكرار النقطة الثابتة، وتضمن وجود p_0 في الفترة.

17. أوجد الدّالة g معرفًا على $[0, 1]$ التي لا تحقّق أيًّا من فرضيات المبرهنة (2.2) ولها نقطة ثابتة وحيدة في $[0, 1]$.

18. أ. أثبت أن المبرهنة (2.2) صحيحة إذا استبدل $|g'(x)| \le k$ بـ $g'(x) \le k$ لكل $x \in (a, b)$
(تلميح: الوحدانية فقط موضع النقاش).
ب. أثبت أن المبرهنة (3.2) لا تتحقق في حالة استبدال $|g'(x)| \le k$ بـ $g'(x) \le k$.
(ملحوظة: أثبت أن $g(x) = 1 - x^2$ لكل x في الفترة $[0, 1]$ يحقّق مثال المعكوس).

19. أ. استخدم المبرهنة (3.2) لإثبات كون المتتالية

$$x_n = \frac{1}{2}x_{n-1} + \frac{1}{x_{n-1}} \quad \text{لكل } n \ge 1$$

تتقارب إلى $\sqrt{2}$ عندما يكون $x_0 > \sqrt{2}$.
ب. استخدم حقيقة كون $0 < (x_0 - \sqrt{2})^2$ عندما يكون $x_0 \ne \sqrt{2}$ لإثبات أنه في حالة كون

$x_1 < \sqrt{2}$ فإنّ $0 < x_0 < \sqrt{2}$
ج. استخدم تمهيدية الفقرتين (أ) و (ب) لإثبات كون المتتالية في (أ) تتقارب إلى $\sqrt{2}$ عندما يكون $x_0 > 0$.

20. أ. أثبت أنه لو كان A أي عدد موجب، فإنّ المتتالية

$$x_n = \frac{1}{2}x_{n-1} + \frac{A}{2x_{n-1}} \quad \text{لكل} \quad n \geq 1$$

تتقارب إلى $\sqrt{A}$ عندما يكون $x_0 > 0$.
ب. ماذا يحدث لو أن $x_0 < 0$ ؟

21. استبدل الافتراض "العدد الموجب $k < 1$ موجود مع $|g'(x)| \leq k$ " بافتراض "g تحقّق شرط لبشتز عند الفترة $[a, b]$ مع ثابت لبشتز $L < 1$". (انظر التمرين (25) من الفصل 1.1) أثبت أن استنتاجات هذه المبرهنة ما زالت متحقّقة.

22. افترض أن الدّالة g قابلة للاشـتقاق باسـتمرار عند الفـترة (c, d) التي تتضمن النقطة الثابتة p للدّالة g. أثبت أنه إذا كانت $|g'(p)| < 1$ فإنّ $\delta > 0$ موجودة بحيث لو كان $|p_0 - p| \leq \delta$، فإنّ تكرار النقطة الثابتة يتقارب.

23. يتعرض الجسم عند سقوطه عموديًّا في الهواء لمقاومة اللزوجة إلى جانب قوة الجاذبية. افترض أن جسمًا بكتلة m أسقط من ارتفاع s_0، وأن ارتفاع الجسم بعد t من الثواني هو

$$s(t) = s_0 - \frac{mg}{k}t + \frac{m^2 g}{k^2}(1 - e^{-kt/m})$$

بحيث إن $g = 32.17\ \text{ft/s}^2$، وk يمثّل معامل مقاومة الهواء بوحدات lb-s/ft. افترض $s_0 = 300\ \text{ft}$ و $m = 0.25\ \text{lb}$ و $k = 0.1\ \text{lb-s/ft}$ أوجد ضمن $0.01\ \text{s}$ الوقت الذي يستغرقه الجسم للوصول إلى الأرض.

24. ليكن $g \in C^1[a, b]$ و p ضمن (a, b) مع $g(p) = p$ و $|g'(p)| > 1$. أثبت وجود $\delta > 0$ بحيث لو كانت $0 < |p_0 - p| < \delta$ فإنّ $|p_0 - p| < |p_1 - p|$. من ثم فهمها كان التقريب الابتدائي p_0 متقاربًا إلى p، فإنّ التكرار الآتي p_1 أكثر بعدًا، وأخيرًا فإنّ تكرار النقطة الثابتة لا يتقارب إذا كان $p_0 \neq p$.

3.2 طريقة نيوتن Newton's Method

طريقة نيوتن (أو نيوتن–رافسون) هي إحدى أكثر الطرائق العددية كفاءة في حل مسائل إيجاد الجذر. وهناك عدة أساليب لتقديم هذه الطريقة.

فإذا كنا نريد الخوارزمية فقط يمكننا اعتماد أسلوب الشكل البياني، كما هو الحال غالبًا في التفاضل والتكامل، ويمكن أيضًا اشتقاق طريقة نيوتن بوصفها أسلوبًا لإيجاد تقارب أسرع مما تعطيه أنواع أخرى من التكرار الدّالي، كما كان في الفصل (4.2). وستُعرَض لاحقًا طريقة ثالثة لاستخدام طريقة نيوتن تعتمد كثيرة حدود تايلور.

لنفترض أن $f \in C^2[a, b]$، وليكن $p_0 \in [a, b]$ تقريبًا للحل p إلى $f(x) = 0$ بحيث $f'(p_0) \neq 0$ و $|p - p_0|$ صغير. لنفترض أننا وجدنا كثيرة حدود تايلور الأولى للدّالة $f(x)$ حول p_0 وحسبناها عند $x = p$ لنحصل على

$$f(p) = f(p_0) + (p - p_0)f'(p_0) + \frac{(p - p_0)^2}{2}f''(\xi(p))$$

حيث إن $\xi(p)$ تقع ما بين p و p_0. وبما أن $f(p) = 0$، تعطي هذه الصيغة

كان إسحق نيوتن Isaac Newton (1642-1727) واحدًا من العلماء الأكثر عبقرية في كل الأزمنة. في أواخر القرن السابع عشر 17 th كانـت فتـرة تـذبذب للعلوم والرياضيـات. وقـد لامـس عمل نيـوتن كل جانب من الرياضيات تقريبًا. وقد قدّمت طريقته لحل المعادلات لإيجاد جذر المعادلة $x^3 - 2x - 5 = 0$، وهي مسألة تم تناولها في التمرين 5 (أ). وعلى الرغم من أنه عرض الطريقة بالنسبة لكثيرات الحدود، فمن الواضح أنه أدرك تطبيقاتها الواسعة.

أعطى جوزيف رافسون **Joseph Raphson (1648–1715)** توضيحًا للطريقة المنسوبة إلى إسحق نيوتن عام 1690 معترفًا بأن نيوتن هو مصدر الاكتشاف . فنيوتن و رافسون لم يستخدما بالضبط المشتقة في شرحهما؛ لأن كليهما تناولا كثيرات الحدود فقط. رياضيون آخرون وخصوصًا جيمس كريكوري **James Gregory (1636 –1675)** كانوا يدركون العملية قيد البحث عند هذا الوقت أو قبله.

$$0 = f(p_0) + (p - p_0) f'(p_0) + \frac{(p - p_0)^2}{2} f''(\xi(p))$$

ويمكن اشتقاق طريقة نيوتن على افتراض أنه ما دامت $|p - p_0|$ صغيرة، فإنّ الحد الذي يتضمن $(p - p_0)^2$ سيكون أصغر كثيرًا، لذا

$$0 \approx f(p_0) + (p - p_0) f'(p_0)$$

وبحل p نحصل على

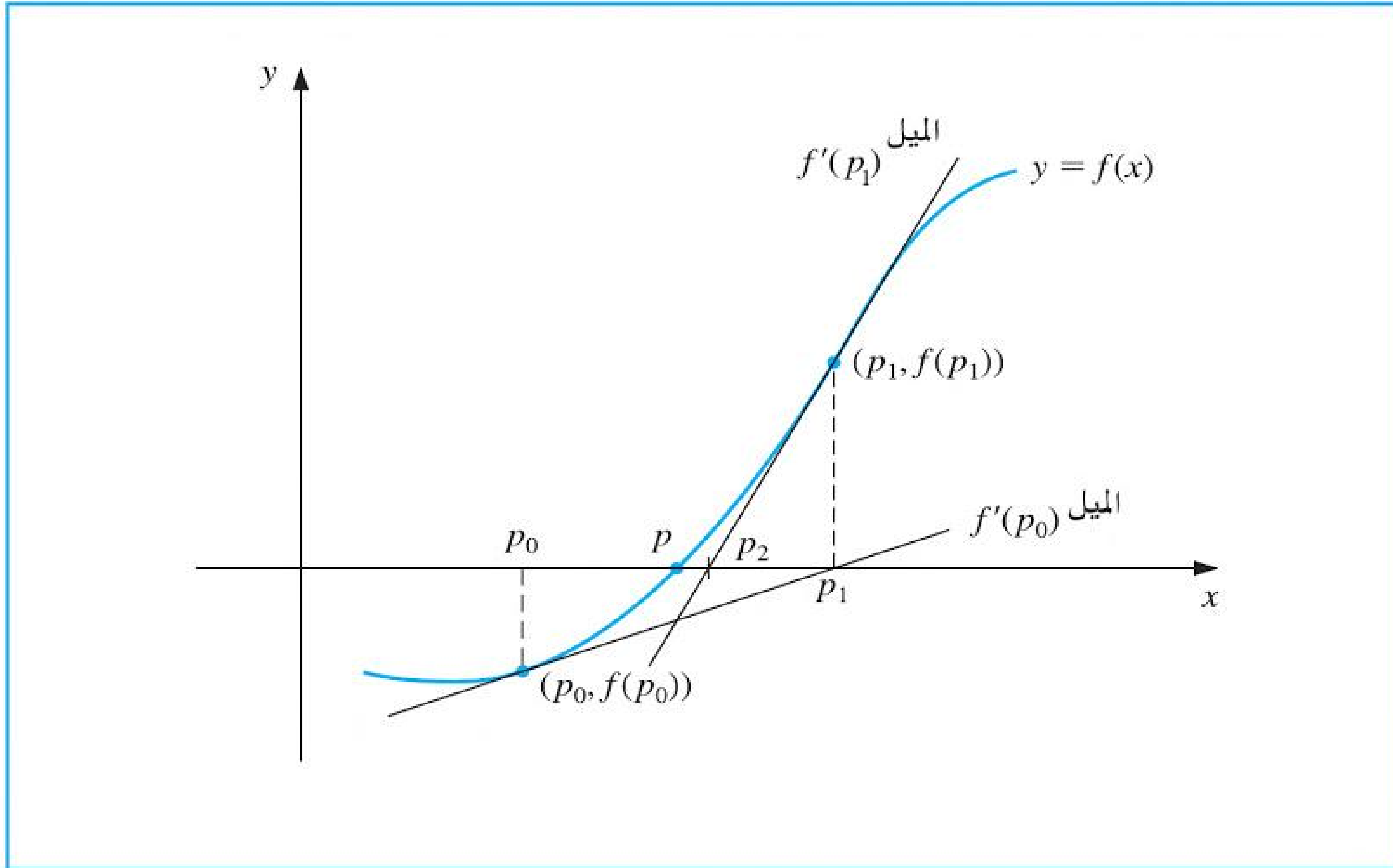
$$p \approx p_1 \equiv p_0 - \frac{f(p_0)}{f'(p_0)}$$

وهذه خطوة نحو طريقة نيوتن التي تبدأ بتقريب ابتدائي p_0 ثم توليد المتتالية $\{p_n\}_{n=0}^{\infty}$ باستخدام

$$p_n = p_{n-1} - \frac{f(p_{n-1})}{f'(p_{n-1})} \quad \text{لكل} \quad n \ge 1 \tag{5.2}$$

ويوضح شكل (7.2) كيفية إيجاد التقريب باستخدام المماسات المتتابعة. (انظر التمرين (15) أيضًا) نبدأ بتقريب ابتدائي p_0، يمثّل التقريب p_1 مقطع محور x من قبل خط المماس للدّالة f عند $(p_0, f(p_0))$، يمثّل التقريب p_2 مقطع محور x من قبل خط المماس للدّالة f عند $(p_1, f(p_1))$ وهكذا. وتتبع الخوارزمية (3.2) هذا الأسلوب.

شكل 7.2



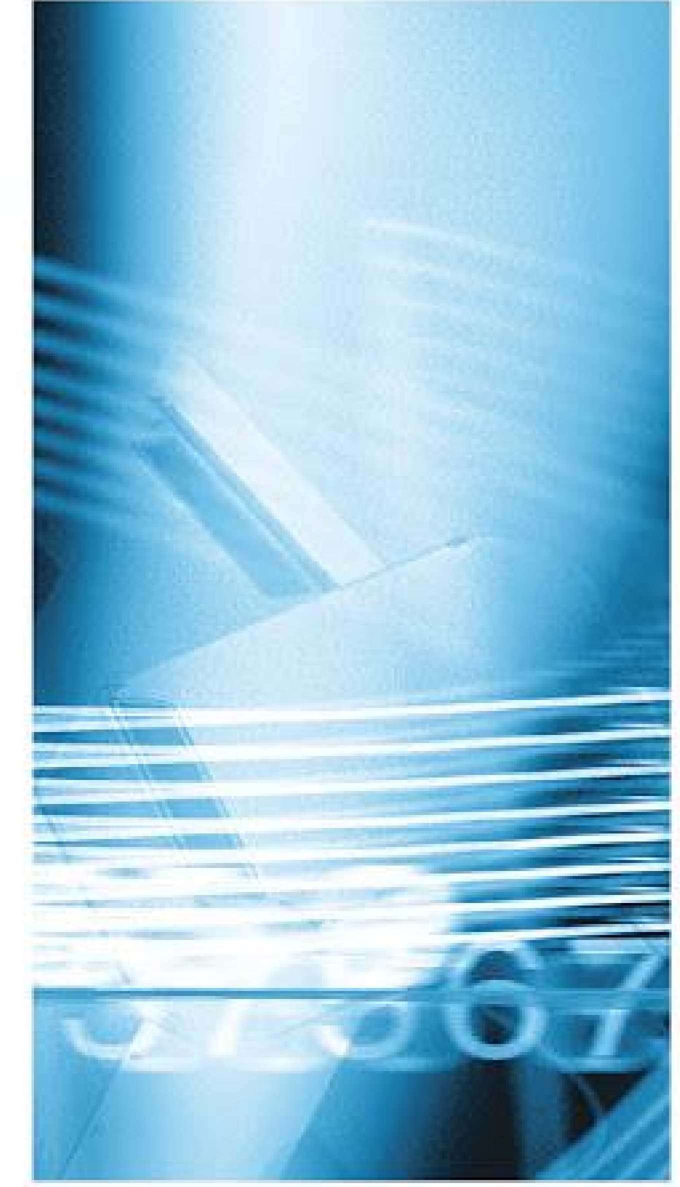
ALGORITHM
الخوارزمية
3.2

خوارزمية نيوتن **Newton's Algorithm**

لإيجاد حل لـ $f(x) = 0$ مع تقريب ابتدائي p_0:

المدخلات: تقريب أوّلي p_0، الحدود المسموح بها TOL، أكبر عدد للتكرارات N_0.

المخرجات: حل تقريبي p أو عبارة "فشل".



الخطوة	المضمون
1	ضع $i = 1$.
2	ما دام $i \leq N_0$ فنفّذ الخطوات 3 − 6 الآتية.
3	ضع $p = p_0 - f(p_0)/f'(p_0)$ (احسب p_i).
4	إذا كان $\|p - p_0\| < TOL$. المُخرج (p) (استكملت العملية بنجاح). توقف.
5	ضع $i = i + 1$.
6	ضع $p_0 = p$ (تحديث p_0).
7	المُخرجات (فشلت الطريقة بعد N_0 من التكرارات و $N_0 =', N_0$) توقف.

■

إن تباينات أسلوب التوقف المصاحبة لطريقة التنصيف يمكن تطبيقها في طريقة نيوتن. حيث نختار حد السماح $\varepsilon > 0$، ثم نوجد $p_1, \ldots p_N$ حتى

$$|p_N - p_{N-1}| < \varepsilon \tag{6.2}$$

$$\frac{|p_N - p_{N-1}|}{|p_N|} < \varepsilon, \quad p_N \neq 0 \tag{7.2}$$

أو

$$|f(p_N)| < \varepsilon \tag{8.2}$$

تستخدم صيغة من المتباينة (6.2) في الخطوة 4 من الخوارزمية (3.2). لاحظ أن المتباينة (8.2) قد لا تعطي الكثير من المعلومات حول الخطأ الحقيقي $|p_N - p|$. (انظر التمرين (16) من الفصل 1.2) وإن طريقة نيوتن عبارة عن أسلوب تكرارات داليّة بصيغة $p_n = g(p_{n-1})$ حيث

$$g(p_{n-1}) = p_{n-1} - \frac{f(p_{n-1})}{f'(p_{n-1})} \quad \text{لكل} \quad n \geq 1 \tag{9.2}$$

وفي الواقع هذا أسلوب تكرارات داليّة استُخدم ليعطي تقاربًا متسارعًا كما رأيناه في الفقرة (هـ) من المثال (3) من الفصل (2.2). ويتضح من الصيغة (9.2) أن طريقة نيوتن لا يمكنها الاستمرار إذا كان $f'(p_{n-1}) = 0$ لبعض قيم n. وفي الواقع سنرى أن الطريقة أكثر جدوى عندما تُحدّد f' بعيدًا عن الصفر وبالقرب من p.

جدول 3.2

n	p_n
0	0.7853981635
1	0.7071067810
2	0.7602445972
3	0.7246674808
4	0.7487198858
5	0.7325608446
6	0.7434642113
7	0.7361282565

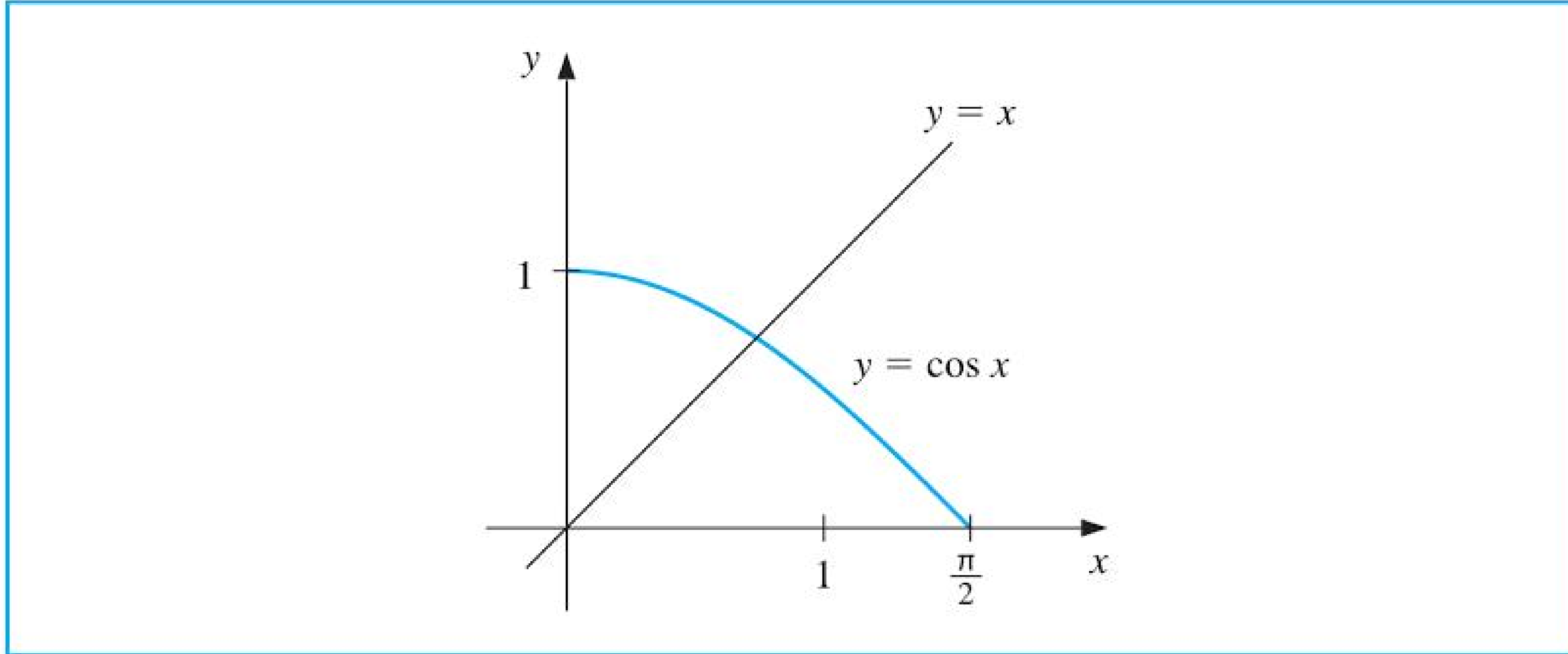
مثال 1

لنفترض أننا نريد تقريب حل للدّالة $f(x) = \cos x - x = 0$. إن حل مسألة إيجاد الجذر هذه هو حل لمسألة النقطة الثابتة $x = \cos x$ أيضًا، ويشير الرسم في شكل (8.2) إلى أن نقطة ثابتة واحدة p تقع في الفترة $[0, \pi/2]$. ويوضح الجدول (3.2) نتائج تكرار النقطة الثابتة مع $p_0 = \pi/4$، ومنها نستنتج أن أفضل قيمة هي $p \approx 0.74$.

ولتناول هذه المسألة على نحو مختلف؛ عرّف $f(x) = \cos x - x$، وطبّق طريقة نيوتن. وما دام $f'(x) = -\sin x - 1$، فإنّ المتتالية تتولد عن طريق

$$p_n = p_{n-1} - \frac{\cos p_{n-1} - p_{n-1}}{-\sin p_{n-1} - 1} \quad \text{لكل} \quad n \geq 1$$

شكل 8.2



ويتضمن جدول (4.2) تقريبات تولّدت مع $p_0 = \pi/4$، ونلاحظ تقريبًا متميزًا عند $n = 3$. ونتوقع أن يكون هذا التقريب دقيقًا للمنازل الموضحة بسبب التوافق بين p_3 و p_4. ■

جدول 4.2

n	p_n
0	0.7853981635
1	0.7395361337
2	0.7390851781
3	0.7390851332
4	0.7390851332

ويشير اشتقاق سلسلة تايلور لطريقة نيوتن في بداية هذا الفصل إلى ضرورة دقة التقدير الابتدائي. والافتراض الضروري هو كون الحد المتضمن $(p - p_0)^2$ صغيرًا مقارنة بـ $|p - p_0|$ على أنه من الممكن حذفه. وهذا بالتأكيد لن يتحقّق ما لم يكن p_0 تقريبًا جيدًا إلى p. وإذا لم يكن p_0 قريبًا بما يكفي من الجذر الحقيقي فإن هناك سببًا ضعيفًا لملاحظة تقارب طريقة نيوتن نحو الجذر. وعلى أي حال قد ينتج في بعض الحالات وحتى في حالة التقريب الضعيف تقارب. (ويوضح التمرينان (20) و (21) بعض هذه الحالات).

وتوضح مبرهنة التقارب التالية لطريقة نيوتن الأهمية المبرهنة لاختيار p_0.

مبرهنة 5.2 ليكن $f \in C^2[a, b]$. إذا كان $p \in [a, b]$ حيث $f(p) = 0$ و $f'(p) \neq 0$، فيوجد $\delta > 0$ بحيث تولّد طريقة نيوتن المتتالية المتقاربة $\{p_n\}_{n=1}^{\infty}$ إلى p ولأي تقريب ابتدائي $p_0 \in [p - \delta, p + \delta]$. ■

البرهان البرهان مبني على تحليل طريقة نيوتن بوصفه أسلوب تكرارات داليّة $p_n = g(p_{n-1})$ لكل $n \geq 1$ مع

$$g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$$

ليكن k ضمن $(0, 1)$. في البداية توجد الفترة $[p - \delta, p + \delta]$ على أن g تنقلها إلى نفسها حيثما $|g'(x)| \leq k$ لكل $x \in (p - \delta, p + \delta)$.

وحيث إن f' متصلة، وإن $f'(p) \neq 0$، فإنّ الفقرة (a) من تمرين (27) فصل (1.1) يؤدي إلى حتمية وجود $\delta_1 > 0$ حيث $f'(x) \neq 0$ لـ $[a, b] \supseteq [p - \delta_1, p + \delta_1] \ni x$. وأخيرًا تكون الدالّة g معرفة ومتصلة ضمن $[p - \delta_1, p + \delta_1]$، كما أن

$$g'(x) = 1 - \frac{f'(x) f'(x) - f(x) f''(x)}{[f'(x)]^2} = \frac{f(x) f''(x)}{[f'(x)]^2}$$

لـ $x \in [p - \delta_1, p + \delta_1]$. بحيث إن $f \in C^2[a, b]$، تكون $g \in C^1[p - \delta_1, p + \delta_1]$، وبفرض $f(p) = 0$، فإنّ

$$g'(p) = \frac{f(p)f''(p)}{[f'(p)]^2} = 0$$

ولأن g' متصلة و $0 < k < 1$، فإن الفقرة (ب) من التمرين (27) في الفصل (1.1) يؤدي إلى حتمية وجود δ مع $0 < \delta < \delta_1$، وأن

$$|g'(x)| \le k \quad \text{لكل} \quad x \in [p - \delta, p + \delta]$$

ونحتاج الآن إلى إثبات كون الدالّة g تنقل $[p-\delta, p+\delta]$ إلى $[p-\delta, p+\delta]$، فإذا كان $x \in [p-\delta, p+\delta]$ فإنّ مبرهنة القيمة الوسطى تؤدي إلى أنه لعدد ما ξ بين x و p، يكون لدينا $|g(x) - g(p)| = |g'(\xi)||x - p|$ بالتالي

$$|g(x) - p| = |g(x) - g(p)| = |g'(\xi)||x - p| \le k|x - p| < |x - p|$$

وحيث إن $x \in [p - \delta, p + \delta]$، فإنّ $|x - p| < \delta$ و $|g(x) - p| < \delta$، ومن ثم فإنّ الدالّة g تنقل $[p - \delta, p + \delta]$ إلى $[p - \delta, p + \delta]$.

إن الفرضيات كلها لمبرهنة النقطة الثابتة متحقّقة الآن، وأخيرًا فالمتتالية $\{p_n\}_{n=1}^{\infty}$ المعرّفة بـ

$$p_n = g(p_{n-1}) = p_{n-1} - \frac{f(p_{n-1})}{f'(p_{n-1})} \quad \text{لكل} \quad n \ge 1$$

تتقارب إلى p لأي $p_0 \in [p - \delta, p + \delta]$. ■ ■ ■

تنص المبرهنة (5.2) على أنه: "في حالة الافتراضات المعقولة تتقارب طريقة نيوتن عند تحقّق اختيار تقريب ابتدائي ذي دقة معقولة". وتؤدي إلى أن الثابت k الذي يحد اشتقاق الدالّة g، ويشير أخيرًا إلى سرعة التقارب للطريقة يتناقص إلى الصفر مع استمرار العملية أيضًا. وهذا التمهيد مهم لطريقة نيوتن، لكن من النادر استخدامها عند التطبيق؛ لأنها لا تعلمنا كيفية تحديد δ. في التطبيق العملي يُختار تقريب ابتدائي، وتولّد التقريبات التالية بطريقة نيوتن، وهذه عمومًا إما أن تتقارب بسرعة إلى الجذر، وإما أنه سيكون واضحًا أن التقارب غير ممكن.

إن طريقة نيوتن تمثل أسلوبًا فائق القوة، لكن لها جانبًا سلبيًّا رئيسًا، وهو حاجتنا إلى معرفة قيمة اشتقاق الدالّة f عند كل تقريب. وغالبًا ما يكون $f'(x)$ أكثر صعوبة، ويحتاج إلى عمليات حسابية أكثر لحسابه مقارنة بـ $f(x)$.

وللإحاطة بمسألة تقييم الاشتقاق لطريقة نيوتن؛ نقدم شيئًا مختلفًا قليلًا. ومن خلال التعريف

$$f'(p_{n-1}) = \lim_{x \to p_{n-1}} \frac{f(x) - f(p_{n-1})}{x - p_{n-1}}$$

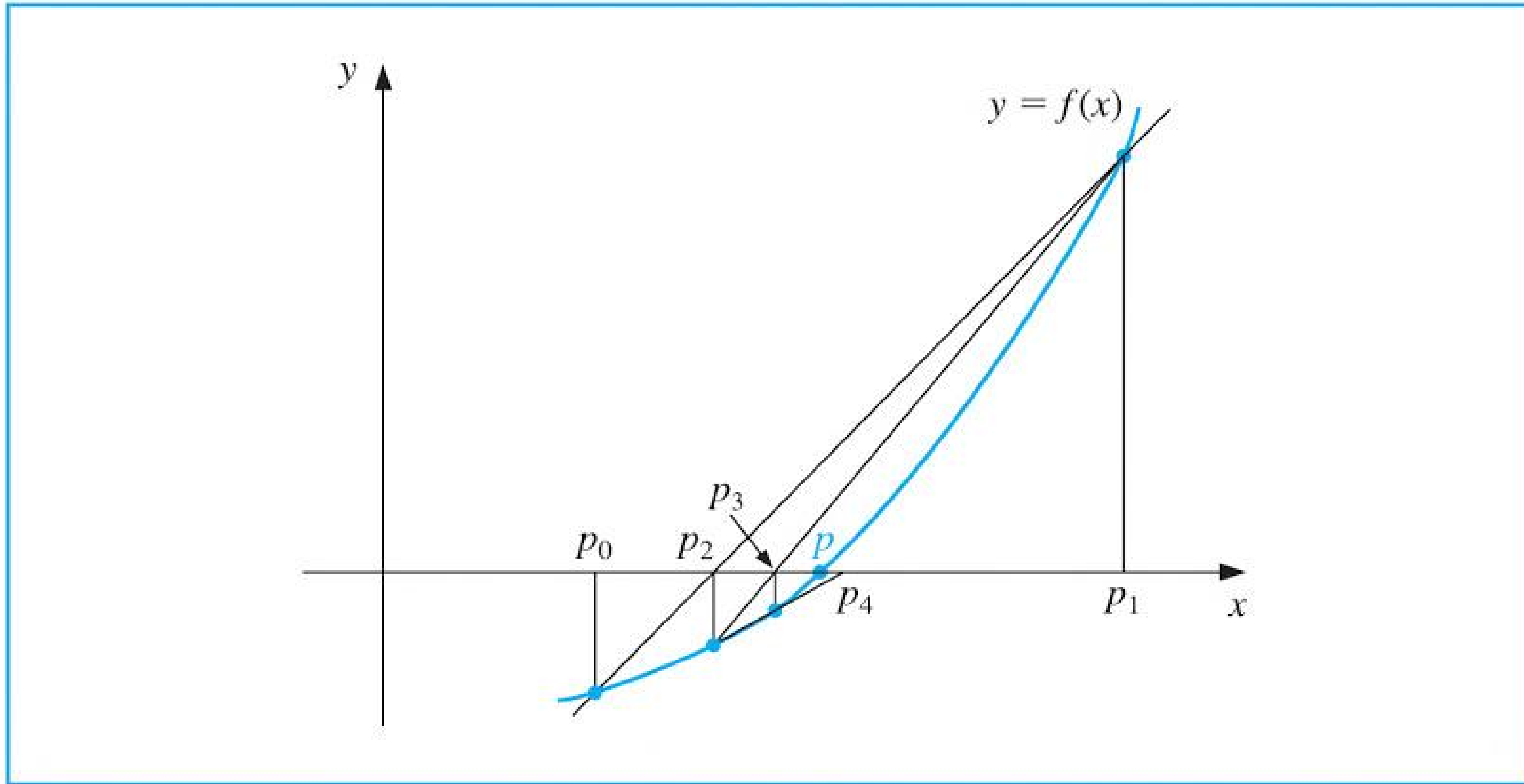
وبجعل $x = p_{n-2}$، لدينا

$$f'(p_{n-1}) \approx \frac{f(p_{n-2}) - f(p_{n-1})}{p_{n-2} - p_{n-1}} = \frac{f(p_{n-1}) - f(p_{n-2})}{p_{n-1} - p_{n-2}}$$

وباستخدام هذا التقريب إلى $f'(p_{n-1})$ في صيغة نيوتن نحصل على

$$p_n = p_{n-1} - \frac{f(p_{n-1})(p_{n-1} - p_{n-2})}{f(p_{n-1}) - f(p_{n-2})} \tag{10.2}$$

شكل 9.2



إن كلمة قاطع مشتقة من الكلمة اللاتينية secan التي تعني القطع. إن طريقة القاطع تستخدم خط القاطع، وهو الخط الواصل بين نقطتين تقطعان المنحنى لتقريب الجذر.

ويدعى هذا الأسلوب "طريقة القاطع Secant Method" ونعرضه في الخوارزمية (4.2). (انظر شكل 9.2) مبتدئين بتقريبين ابتدائيين p_0 و p_1، فإنّ التقريب p_2 عبارة عن تقاطع x مع الخط الواصل بين $g\,(p_0, f(p_0))$ و $(p_1, f(p_1))$. والتقريب p_3 عبارة عن تقاطع x مع الخط الواصل بين $(p_1, f(p_1))$ و $(p_2, f(p_2))$ وهكذا.



القاطع Secant

لإيجاد حل لـ $f(x) = 0$ مع تقريب ابتدائي p_0 و p_1؛

المدخلات: تقريب ابتدائي p_0 و p_1، الحدود المسموح بها TOL، أكبر عدد لمرات التكرار N_0.

المخرجات: حل تقريبي p أو عبارة "فشل".

الخطوة	المضمون
1	ضع $i = 2$ و $q_0 = f(p_0)$ و $q_1 = f(p_1)$.
2	ما دام $i \leq N_0$ فنفّذ الخطوات 3 – 6 الآتية.
3	ضع $p = p_1 - q_1(p_1 - p_0)/(q_1 - q_0)$ (احسب p_i).
4	إذا كان $\lvert p - p_1 \rvert < TOL$ فإن المخرج (p) (استكملت العملية بنجاح). توقف.
5	ضع $i = i + 1$.
6	ضع $p_0 = p_1$ (حيث p_0, q_0, p_1, q_1) $q_0 = q_1$ $p_1 = p$ $q_1 = f(p)$
7	المخرجات (فشلت الطريقة بعد N_0 من التكرارات و $N_0 = $', N_0) توقف.

■

ويتضمن المثال الآتي مسألة سبقت دراستها في المثال (1) عندما استخدمنا طريقة نيوتن مع $p_0 = \pi/4$.

مثال 2

استخدم طريقة القاطع لإيجاد حل لـ $x = \cos x$. قارنا في المثال (1) تكرار الدّالة وطريقة نيوتن بتقريب ابتدائي $p_0 = \pi/4$. وهنا نحتاج إلى تقريبين ابتدائيين. ويدرج جدول (5.2) الحسابات مع $p_0 = 0.5$، $p_1 = \pi/4$ والصيغة

$$p_n = p_{n-1} - \frac{(p_{n-1} - p_{n-2})(\cos p_{n-1} - p_{n-1})}{(\cos p_{n-1} - p_{n-1}) - (\cos p_{n-2} - p_{n-2})} \quad \text{لكل} \quad n \geq 2$$

من الخوارزمية (4.2). ■

جدول 5.2

n	p_n
0	0.5
1	0.7853981635
2	0.7363841388
3	0.7390581392
4	0.7390851493
5	0.7390851332

وبمقارنة النتائج هنا بتلك التي في المثال (1)، نرى أن p_5 دقيق لغاية الرتبة الكسرية العاشرة. إن تقارب طريقة القاطع أسرع كثيرًا من تكرار الدّالة، لكنها أبطأ قليلًا من طريقة نيوتن التي تعطي هذه الرتبة من الدقة مع p_3، وهذا صحيح عمومًا. (انظر التمرين (14) من الفصل 4.2).

تُستخدم طريقة نيوتن أو طريقة القاطع في تنقية الجواب المعطى بأسلوب آخر غالبًا مثل طريقة التنصيف، لكون هذه الطرائق تتطلب تقريبًا ابتدائيًّا جيدًا، لكنها عمومًا تعطي تقاربًا سريعًا. وإن كل زوج من التقريبات المتتابعة في طريقة التنصيف يحوّط جذر الصيغة p، أي أنه للعدد الصحيح الموجب n كله جذر ما بين a_n و b_n. وهذا يؤدي إلى أنه لأي n، فإنّ تكرارات طريقة التنصيف تحقّق

$$|p_n - p| < \tfrac{1}{2}|a_n - b_n|$$

التي تحقّق حدًّا خطأً سهل الحساب للتقريبات. إن إحاطة الجذر ليس مضمونًا لطريقة نيوتن أو طريقة القاطع. ويتضمن جدول (4.2) نتائج لطريقة نيوتن طبّقت على $f(x) = \cos x - x$ حيث وُجد جذر تقريبي مقداره 0.7390851332. لاحظ أن هذا الجذر ليس محوطًا بـ p_0, p_1 أو p_1, p_2. إن تقريبات طريقة القاطع في هذه المسألة م عطاة في جدول (5.2). فالتقريبان الابتدائيّان p_0 و p_1 يحوطان الجذر، لكن زوج التقريبين p_3 و p_4 قد فشل في عمل ذلك.

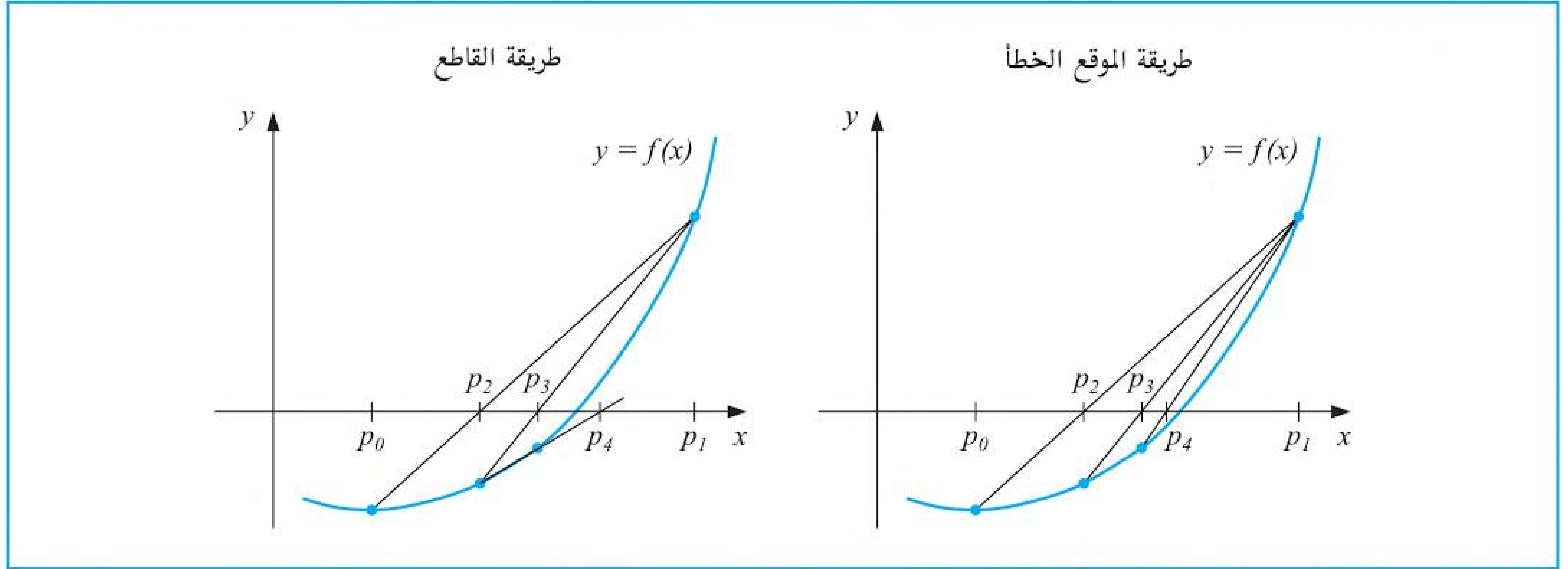
إن طريقة الموقع الخطأ False Position تولّد تقريبات بطريقة القاطع نفسها، لكنها تتضمن اختبارًا لضمان كون الجذر محوّطًا دائمًا ما بين تكرارات متتالية. وعلى الرغم من أنها ليست الطريقة التي نوصي بها عمومًا، إلا أنها توضح كيفية اتحاد المحوطات.

إن المصطلح **Regule Falsi** الذي يعنـي القاعدة الزائفة أو الموقع الزائف يشير إلى كون تقنية استخدام النتائـج زائفة، ولكن ضمن أسـلوب خـاص، لإيجـاد تقـارب لنتيجة صحيحة. ويمكن إيجاد مسائل الموقع الخاطىء على برديات Rhind يعود تاريخهـا إلـى 1650 تقريبًـا قبل الميلاد.

يُختار p_0 و p_1 مع $f(p_0) \cdot f(p_1) < 0$ في البداية. ويُختار التقريب p_2 بأسلوب طريقة القاطع نفسه، مثل تقاطع x مع الخط الواصل بين $(p_0, f(p_0))$ و $(p_1, f(p_1))$. ولتحديد خط قاطع نستخدم حساب p_3، ونحتاج إلى تدقيق $f(p_2) \cdot f(p_1)$. فإذا كان هذا المقدار سالبًا فإنّ p_1 و p_2 يحوطان الجذر، ونختار p_3 على أنه تقاطع x مع الخط الواصل بين $(p_1, f(p_1))$ و $(p_2, f(p_2))$. وبعكس ذلك نختار p_3 على أنه تقاطع x مع الخط الواصل بين $(p_0, f(p_0))$ و $(p_2, f(p_2))$. ومن ثم نبدل القياس على p_0 و p_1. و بالأسلوب نفسه عند إيجاد p_3، فإنّ إشارة $f(p_3) \cdot f(p_2)$

تحدد ما إذا كان علينا استخدام p_2 و p_3 أو p_3 و p_1 لحساب p_4، وتعاد تسمية p_1 و p_2 في الحالة الأخيرة. وتضمن تكرار التسمية هذه أن الجذر محاط بتكرارات متتالية. والعملية موضحة في الخوارزمية (5.2)، ويوضح شكل (10.2) كيف تختلف التكرارات عما هي عليه في طريقة القاطع؛ إذ التقريبات الثلاثة الأولى متماثلة، إلا الرابع فمختلف.

شكل 10.2





الموقع الخطأ False Position

لإيجاد حل لـ $f(x) = 0$ مع كون f دالّة متصلة على الفترة $[p_0, p_1]$، بحيث إن $f(p_0)$ و $f(p_1)$ لهما إشارة مختلفة.

المدخلات: تقريب ابتدائي p_0 و p_1 الحدود المسموح بها TOL، أكبر عدد لمرات التكرار N_0.

المخرجات: حل تقريبي p أو عبارة "فشل".

الخطوة	المضمون
1	ضع $i = 2$ $q_0 = f(p_0)$ و $q_1 = f(p_1)$
2	ما دام $i \le N_0$ فنفّذ الخطوات ٣ – ٧ الآتية:
3	ضع $p = p_1 - q_1(p_1 - p_0)/(q_1 - q_0)$ (احسب p_i)
4	إذا كان $\lvert p - p_1 \rvert < TOL$ فإن المخرج (p) (استكملت العملية بنجاح). توقف.
5	ضع $i = i + 1$ و $q = f(p)$
6	إذا $q \cdot q_1 < 0$ ضع $p_0 = p_1$ $q_0 = q_1$

7	ضع $p_1 = p$ $q_1 = q$
8	المخرجات (فشلت الطريقة بعد N_0 من التكرارات و $(N_0 = ', N_0)$ توقف.

■



جدول 6.2

n	p_n
0	0.5
1	0.7853981635
2	0.7363841388
3	0.7390581392
4	0.7390848638
5	0.7390851305
6	0 7390851332

وضح جدول (6.2) نتائج طريقة الموقع الخطأ المطبقة على $f(x) = \cos x - x$ مع التقريبات نفسها التي استخدمناها في طريقة القاطع في المثال (2). لاحظ أن التقريبات تتّفق من خلال p_3، وأن طريقة الموقع الخطأ تتطلب تكرارات إضافية لإعطاء الدقة نفسها لطريقة القاطع.

يتطلب الضمان المضاف إلى طريقة الموقع الخطأ حسابات أكثر مقارنة بطريقة القاطع، بالضبط مثل التبسيط الذي توفره طريقة القاطع مقارنةً بطريقة نيوتن التي تأتي على حساب تكرارات إضافية. ويمكن رؤية أمثلة أخرى على خصائص هذه الطرائق الإيجابية والسلبية من خلال التمرينين العمليين (17) و (18).

EXERCISE SET — مجموعة التمارين 3.2

1. ليكن $f(x) = x^2 - 6$ و $p_0 = 1$. استخدم طريقة نيوتن لإيجاد p_2.
2. ليكن $f(x) = -x^3 - \cos x$ و $p_0 = -1$. استخدم طريقة نيوتن لإيجاد p_2. هل يمكن استخدام $p_0 = 0$؟
3. ليكن $f(x) = x^2 - 6$. أوجد p_3 عندما $p_0 = 3$ و $p_1 = 2$.
   أ. استخدم طريقة القاطع.
   ب. استخدم طريقة الموقع الخطأ.
   ج. أيهما أقرب إلى $\sqrt{6}$؟
4. ليكن $f(x) = -x^3 - \cos x$. أوجد p_3 عندما $p_0 = -1$ و $p_0 = 1$.
   أ. استخدم طريقة القاطع.
   ب. استخدم طريقة الموقع الخطأ.
5. استخدم طريقة نيوتن لإيجاد حلول دقيقة لغاية 10^{-4} للمسائل الآتية:
   أ. $x^3 - 2x^2 - 5 = 0, \quad [1, 4]$ ب. $x^3 + 3x^2 - 1 = 0, \quad [-3, -2]$
   ج. $x - \cos x = 0, \quad [0, \pi/2]$ د. $x - 0.8 - 0.2 \sin x = 0, \quad [0, \pi/2]$
6. استخدم طريقة نيوتن لإيجاد حلول دقيقة لغاية 10^{-5} للمسائل الآتية:
   أ. $e^x + 2^{-x} + 2\cos x - 6 = 0$ لكل $1 \le x \le 2$
   ب. $\ln(x-1) + \cos(x-1) = 0$ لكل $1.3 \le x \le 2$
   ج. $2x \cos 2x - (x-2)^2 = 0$ لكل $2 \le x \le 3$ و $3 \le x \le 4$
   د. $(x-2)^2 - \ln x = 0$ لكل $1 \le x \le 2$ و $e \le x \le 4$
   هـ. $e^x - 3x^2 = 0$ لكل $0 \le x \le 1$ و $3 \le x \le 5$
   و. $\sin x - e^{-x} = 0$ لكل $0 \le x \le 1$، $3 \le x \le 4$ و $6 \le x \le 7$
7. كرر العمل على تمرين (5) مستخدمًا طريقة القاطع.
8. كرر العمل على تمرين (6) مستخدمًا طريقة القاطع.
9. كرر العمل على تمرين (5) مستخدمًا طريقة الموقع الخطأ.
10. كرر العمل على تمرين (6) مستخدمًا طريقة الموقع الخطأ.
11. استخدم الطرائق الثلاث في هذا الفصل لإيجاد حلول دقيقة لغاية 10^{-5} للمسائل الآتية:
   أ. $3x - e^x = 0 \quad \text{for } 1 \le x \le 2$ ب. $x + 3\cos x - e^x = 0 \quad \text{for } 0 \le x \le 1$

12. استخدم الطرائق الثلاث في هذا الفصل لإيجاد حلول دقيقة لغاية 10^{-7} للمسائل الآتية:

أ. $x^2 - 4x + 4 - \ln x = 0$ لكل $1 \le x \le 2$ و $2 \le x \le 4$.

ب. $x + 1 - 2\sin \pi x = 0$ لكل $0 \le x \le \frac{1}{2}$ و $\frac{1}{2} \le x \le 1$.

13. استخدم طريقة نيوتن للتقريب بدقّة 10^{-4}، لتقريب قيمة x والتي تعطي النقطة الأقرب إلى $(1, 0)$ على المنحنى $y = x^2$. [ملحوظة: صغّر إلى $[d(x)]^2$، حيث يمثّل $d(x)$ المسافة ما بين (x, x^2) إلى $(1, 0)$].

14. استخدم طريقة نيوتن للتقريب بدقّة 10^{-4}، لتقريب قيمة x والتي تعطي النقطة الأقرب إلى $(2, 1)$ على المنحنى $y = 1/x$.

15. فيما يأتي توضيح لطريقة نيوتن بالشكل البياني: افترض أن $f'(x)$ موجود ضمن $[a, b]$، وأن $f'(x) \neq 0$ ضمن $[a, b]$. وأكثر من ذلك، افترض حتمية وجود $p \in [a, b]$ واحدة بحيث $f(p) = 0$، وليكن $p_0 \in [a, b]$ بصورة غير منهجية. لتكن p_1 نقطة على خط المماس لـ f عند $(p_0, f(p_0))$ قاطعًا محور x. ليمثل p_n تقاطع خط المماس لـ f لمحور x عند $(p_{n-1}, f(p_{n-1}))$ اشتق الصيغة التي توضح هذه الطريقة.

16. استخدم طريقة نيوتن لحل الصيغة

$$0 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4}x^2 - x\sin x - \frac{1}{2}\cos 2x \quad \text{مع} \quad p_0 = \frac{\pi}{2}$$

طبّق التكرار مستخدمًا طريقة نيوتن حتى تحقّق الدقة 10^{-5}. وضح لماذا تكون التمهيدية غير اعتيادية بالنسبة إلى طريقة نيوتن. أيضًا حل الصيغة باستخدام القيم $p_0 = 5\pi$ و $p_0 = 10\pi$.

17. عديدة حدود من الرتبة الرابعة

$$f(x) = 230x^4 + 18x^3 + 9x^2 - 221x - 9$$

لها صفران حقيقيان، أحدهما ضمن $[-1, 0]$ والآخر ضمن $[0, 1]$. حاول تقريب هذين الصفرين لغاية 10^{-6} مستخدمًا:

أ. طريقة الموقع الخطأ

ب. طريقة القاطع

ج. طريقة نيوتن،

استخدم النقاط الطرفية لكل فترة على نحو تقريبات ابتدائية في (أ) و(ب) والنقاط الوسطية في(ج).

18. للدالّة $f(x) = \tan \pi x - 6$ صفر عندما $(1/\pi)\arctan 6 \approx 0.447431543$. ليكن $p_0 = 0$ و $p_1 = 0.48$. استخدم عشر تكرارات لكل من الطرائق الآتية لتقريب هذا الجذر. أي الطرائق أنجح؟ ولماذا؟

أ. طريقة التنصيف

ب. طريقة الموقع الخطأ

ج. طريقة القاطع

19. يمكن كتابة صيغة التكرار لطريقة القاطع بصيغة أبسط هي

$$p_n = \frac{f(p_{n-1})p_{n-2} - f(p_{n-2})p_{n-1}}{f(p_{n-1}) - f(p_{n-2})}$$

وضح لماذا تبدو صيغة التكرار هذه عمومًا أقل دقة من تلك المعطاة في الخوارزمية (4.2).

20. للصيغة $x^2 - 10\cos x = 0$ حلان ± 1.3793646. استخدم طريقة نيوتن لتقريب الحلول لغاية دقة 10^{-5} مع هذه القيم لـ p_0:

أ. $p_0 = -100$ ب. $p_0 = -50$ ج. $p_0 = -25$

د. $p_0 = 25$ هـ. $p_0 = 50$ و. $p_0 = 100$

21. للصيغة $4x^2 - e^x - e^{-x} = 0$ أربعة حلول $\pm x_1$ و $\pm x_2$. استخدم طريقة نيوتن لتقريب الحل لغاية 10^{-5} مع هذه القيم لـ p_0:

أ. $p_0 = -10$ ب. $p_0 = -5$ ج. $p_0 = -3$
د. $p_0 = -1$ هـ. $p_0 = 0$ و. $p_0 = 1$
ز. $p_0 = 3$ ح. $p_0 = 5$ ط. $p_0 = 10$

22. استخدم Maple لتحديد عدد مرات التكرار اللازمة لطريقة نيوتن مع $p_0 = \pi/4$ لإيجاد جذر $f(x) = \cos x - x$ ضمن 10^{-100}.

23. الدّالة $f(x) = \ln(x^2 + 1) - e^{0.4x} \cos \pi x$ له عدد لانهائي من الأصفار

أ. حدد ضمن 10^{-6} الأصفار السالبة فقط.

ب. حدد ضمن 10^{-6} أصغر أربعة أصفار موجبة.

ج. حدد تقريبًا ابتدائيًا معقولًا لإيجاد أصغر صفر موجب من الرتبة n لـ f. (ملحوظة: ارسم شكلًا تقريبيًا لـ f.)

د. استخدم الفقرة (ج) لتحديد الصفر الخامس والعشرين الأصغر الموجب لـ f.

24. أوجد تقريبًا دقيقًا ضمن 10^{-4} لصيغة المجتمع

$$1,564,000 = 1,000,000e^{\lambda} + \frac{435,000}{\lambda}(e^{\lambda} - 1)$$

التي شرحت في مقدمة هذا الفصل. استخدم هذه القيمة للتنبؤ بحجم المجتمع عند نهاية السنة الثانية، مفترضًا أن معدل الهجرة السنوي 435,000 شخص خلال هذه السنة.

25. عددان مجموعهما 20. إذا أضيف كل عدد إلى جذره التربيعي فإنّ حاصل ضرب المجموعين يكون 155.55. حدد هذين العددين ضمن 10^{-4}.

26. القيمة التراكمية لحساب التوفير مبنية على دفعات دورية اعتيادية يمكن تحديدها من خلال صيغة الأقساط المستحقة

$$A = \frac{P}{i}[(1 + i)^n - 1]$$

في هذه الصيغة، تمثّل A الرصيد في هذا الحساب، وتمثّل p المبلغ المودع اعتياديًا، وتمثل i معدل الفائدة خلال فترة محددة، ولعدد n من هذه الفترات. يرغب أحد المهندسين في امتلاك حساب توفير بمبلغ $750,000 عند تقاعده بعد 20 سنة، ويستطيع إيداع $1500 شهريًا لتحقيق هذا الهدف. فما أقل معدل فائدة لاستثمار هذا المبلغ مفترضًا حسابها شهريًا؟

27. مسائل حول كمية الأموال المطلوب تسديدها بقرض ضمن فترة زمنية محددة تتضمن الصيغة

$$A = \frac{P}{i}[1 - (1 + i)^{-n}]$$

المعروفة بصيغة الأقساط الاعتيادية. في هذه الصيغة، تمثّل A مبلغ القرض، و p مبلغ الدفعات المسددة كلها، وتمثّل i معدل الفائدة خلال فترة محددة ولعدد n من هذه الفترات. افترض وجود حاجة إلى قرض مقداره $130,000 ومدته 30 سنة لشراء دار، وأن المقترض بوسعه تسديد القرض بدفعات شهرية لا تزيد على $1000. فما أعلى معدلِ فائدة تناسب قدرة المقترض؟

28. إن حقن دواء لمريض يؤدي إلى تركيز الدم وفقًا للصيغة $c(t) = Ate^{-t/3}$ ملجم لكل مللتر، بعد زمن t ساعة من حقن A من الوحدات. والتركيز الأعلى الآمن هو 1 mg/ml.

أ. ما الكمية الواجب حقنها للوصول إلى هذا التركيز الآمن؟

ب. وجب حقن كمية إضافية من هذا الدواء للمريض عقب انخفاض التركيز إلى 0.25 mg/ml. حدد متى يجب إعطاء هذه الزيادة إلى أقرب دقيقة.





















































































































الحدود هذه وصيغة الخطأ في التمرين (11). ■ ■ ■

مثال 1 استخدمت كثيرة حدود هرمايت المتوافقة مع البيانات الموجودة في جدول (12.3) لإيجاد تقريب إلى $f(1.5)$.

جدول 12.3

$f'(x_k)$	$f(x_k)$	x_k	k
−0.5220232	0.6200860	1.3	0
−0.5698959	0.4554022	1.6	1
−0.5811571	0.2818186	1.9	2

نحسب أولاً كثيرات حدود لاجرانج ومشتقاتها. وهذا يعطي

$$L_{2,0}(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} = \frac{50}{9}x^2 - \frac{175}{9}x + \frac{152}{9}, \qquad L'_{2,0}(x) = \frac{100}{9}x - \frac{175}{9}$$

$$L_{2,1}(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)} = \frac{-100}{9}x^2 + \frac{320}{9}x - \frac{247}{9}, \qquad L'_{2,1}(x) = \frac{-200}{9}x + \frac{320}{9}$$

و

$$L_{2,2} = \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)} = \frac{50}{9}x^2 - \frac{145}{9}x + \frac{104}{9}, \qquad L'_{2,2}(x) = \frac{100}{9}x - \frac{145}{9}$$

إن كثيرات حدود $H_{2,j}(x)$ و $\hat{H}_{2,j}(x)$ هي

$$H_{2,0}(x) = [1 - 2(x-1.3)(-5)]\left(\frac{50}{9}x^2 - \frac{175}{9}x + \frac{152}{9}\right)^2$$

$$= (10x - 12)\left(\frac{50}{9}x^2 - \frac{175}{9}x + \frac{152}{9}\right)^2$$

$$H_{2,1}(x) = 1 \cdot \left(\frac{-100}{9}x^2 + \frac{320}{9}x - \frac{247}{9}\right)^2$$

$$H_{2,2}(x) = 10(2-x)\left(\frac{50}{9}x^2 - \frac{145}{9}x + \frac{104}{9}\right)^2$$

$$\hat{H}_{2,0}(x) = (x-1.3)\left(\frac{50}{9}x^2 - \frac{175}{9}x + \frac{152}{9}\right)^2$$

$$\hat{H}_{2,1}(x) = (x-1.6)\left(\frac{-100}{9}x^2 + \frac{320}{9}x - \frac{247}{9}\right)^2$$

$$\hat{H}_{2,2}(x) = (x-1.9)\left(\frac{50}{9}x^2 - \frac{145}{9}x + \frac{104}{9}\right)^2$$

وأخيرًا

$$H_5(x) = 0.6200860H_{2,0}(x) + 0.4554022H_{2,1}(x) + 0.2818186H_{2,2}(x) - 0.5220232\hat{H}_{2,0}(x) - 0.5698959\hat{H}_{2,1}(x) - 0.5811571\hat{H}_{2,2}(x)$$































You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



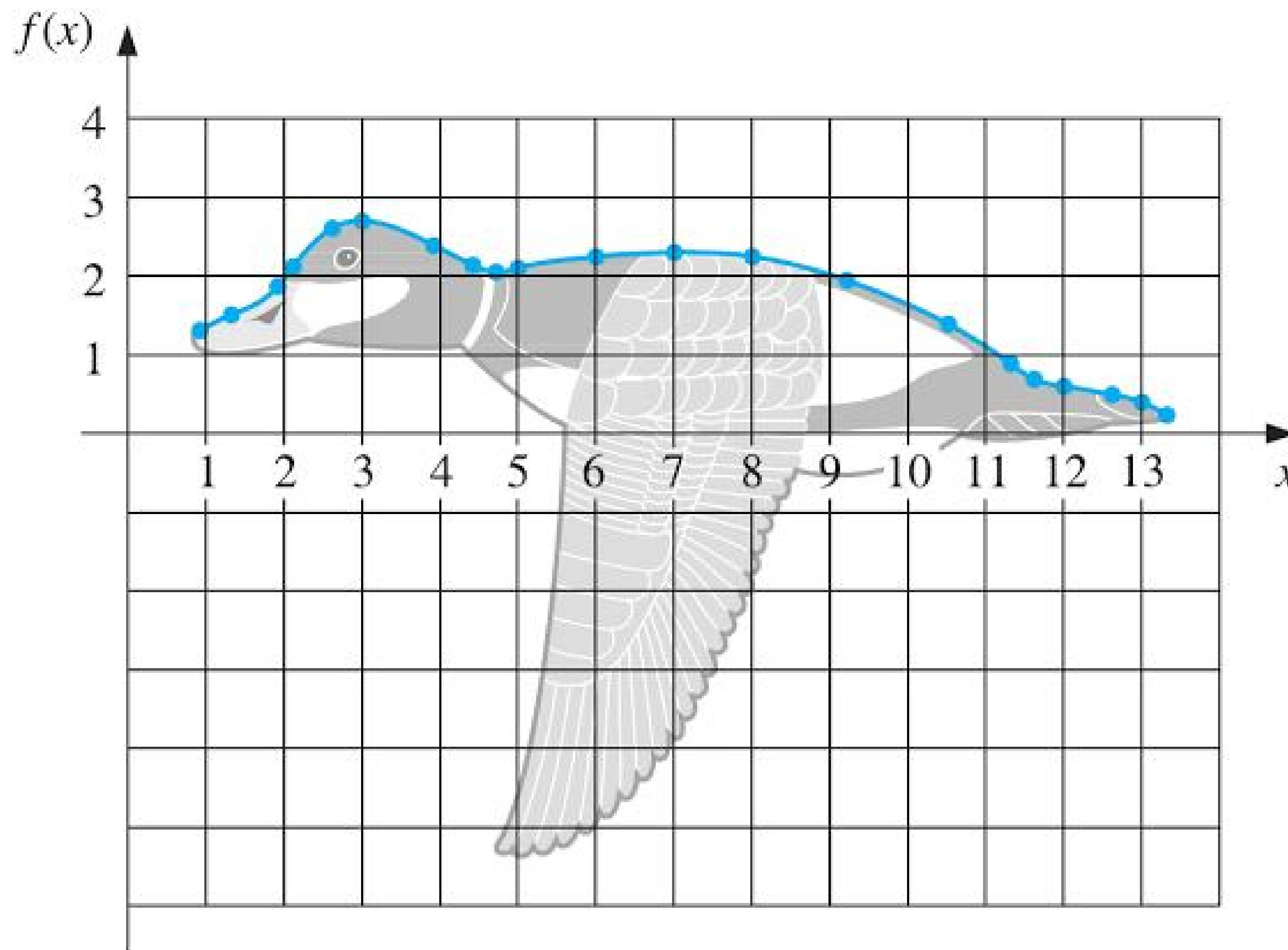




جدول 18.3

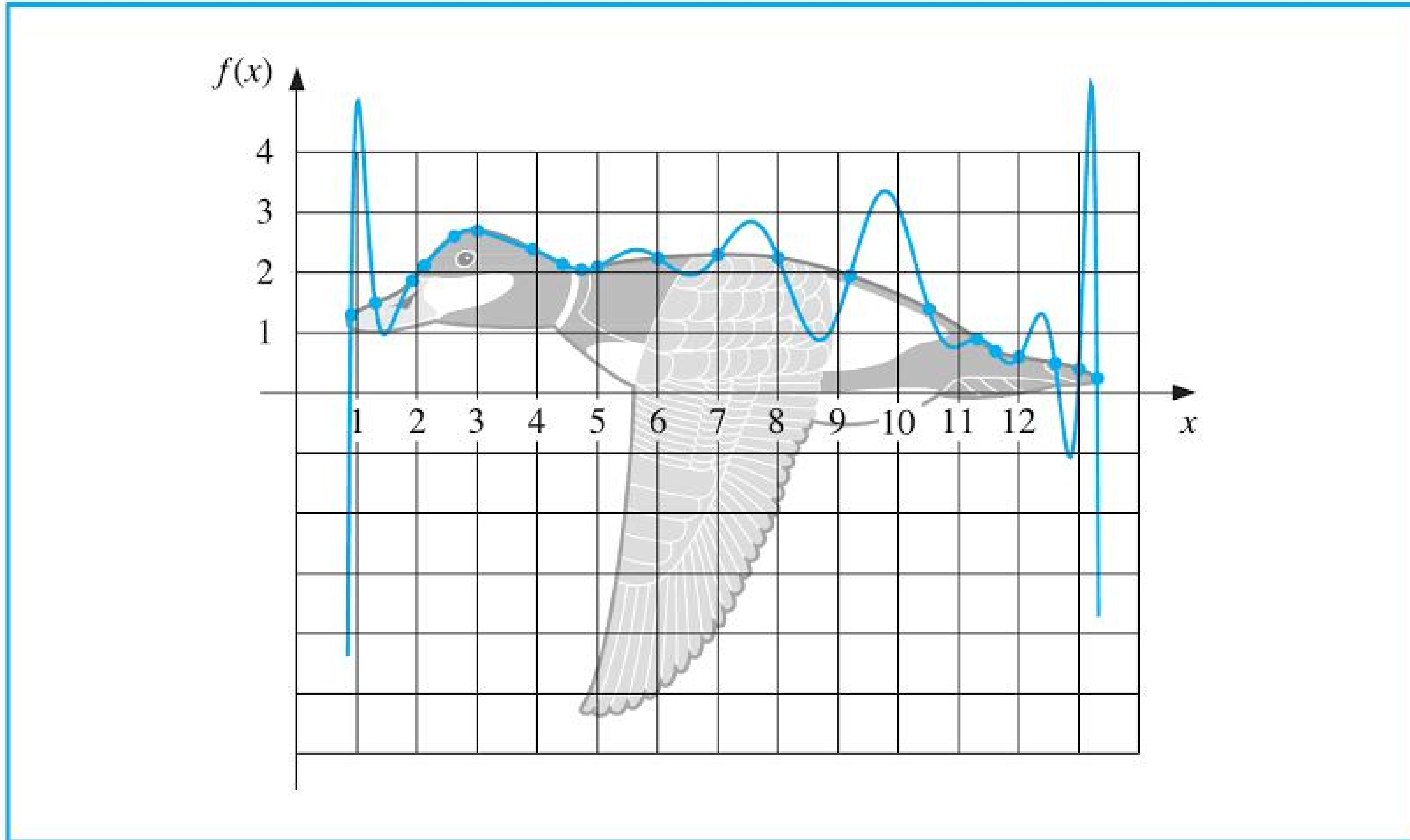
d_j	c_j	b_j	a_j	x_j	j
−0.25	0.00	5.44	1.3	0.9	0
0.95	−0.30	0.42	1.5	1.3	1
−2.96	1.41	1.09	1.85	1.9	2
−0.45	−0.37	1.29	2.1	2.1	3
0.45	−1.04	0.59	2.6	2.6	4
0.17	−0.50	−0.02	2.7	3.0	5
0.08	−0.03	−0.50	2.4	3.9	6
1.31	0.08	−0.48	2.15	4.4	7
−1.58	1.27	−0.07	2.05	4.7	8
0.04	−0.16	0.26	2.1	5.0	9
0.00	−0.03	0.08	2.25	6.0	10
−0.02	−0.04	0.01	2.3	7.0	11
0.02	−0.11	−0.14	2.25	8.0	12
−0.01	−0.05	−0.34	1.95	9.2	13
−0.02	−0.10	−0.53	1.4	10.5	14
1.21	−0.15	−0.73	0.9	11.3	15
−0.84	0.94	−0.49	0.7	11.6	16
0.04	−0.06	−0.14	0.6	12.0	17
−0.45	0.00	−0.18	0.5	12.6	18
0.60	−0.54	−0.39	0.4	13.0	19
			0.25	13.3	20

شكل 3.12



يعطي شكل (13.3) توضيحًا للمنحنى الذي وُلّد مستخدمًا كثيرة حدود لاجرانج للاستكمال الداخلي لتوفيق البيانات في جدول (17.3). وتتكوّن كثيرة حدود الاستكمال الداخلي في هذه الحالة من الرتبة 20، وتتغير بحدة منتجة توضيحًا غريبًا جدًّا لظهر البطة سواءً عند طيرانها أو غير ذلك.

شكل 13.3



ولاستخدام الشريحة المتشابكة لتقريب هذا المنحنى؛ سنحتاج إلى تقريبات اشتقاقية للنهايات. وحتى لو توافرت هذه التقريبات، يمكننا توقُّع تحسن طفيف؛ بسبب التوافق الكبير ما بين الشريحة التكعيبية الحرّة ومنحنى أعلى المخطط. ■

إن إنشاء أخدود متشابك لتقريب أسفل المخطط للبطة الحمراء سيكون أصعب؛ لأن منحنى هذا الجزء لا يمكن صياغته على شكل دالّة لـ x، وعند نقاط معينة لا يظهر المنحنى على نحو متّسق. ويمكن حل المشاكل باستخدام شرائح منفصلة لتمثيل نقاط مختلفة للمنحنى، ولكن الحل الأكثر فاعلية لمنحنيات من هذا النوع سنتناوله في الفصل الآتي.

شروط الحدود المتشابكة عمومًا هي المفضلة عندما تُقرّب الدّوال من خلال الشرائح التكعيبية، لذا يجب تقدير مشتقة الدّالة عند نهايات الفترة، وعند تساوي التباعد ما بين النقاط بالقرب من النهايتين، ويمكن إيجاد تقريبات باستخدام الصيغة (7.4) أو أيٍّ من الصيغ الأخرى المناسبة المذكورة في الفصلين (1.4 و 2.4). وعند عدم تساوي التباعد ما بين النقاط، فإن المسألة تغدو أصعب.

وكي نختم هذا الفصل، فإننا ندرج صيغة حد الخطأ للشريحة التكعيبية مع الشروط الحدودية المتشابكة. ويمكن إيجاد برهان هذه النتيجة في [Schul, pp. 57–58].

مبرهنة 13.3
ليكن $f \in C^4[a, b]$ وليكن $\max_{a\le x\le b}|f^{(4)}(x)| = M$. إذا كان S استكمالاً داخليًّا للشريحة التكعيبية المتشابكة الوحيدة لـ f بالنسبة إلى النقاط $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$، فإنه لكل x في $[a, b]$ يكون لدينا

$$|f(x) - S(x)| \le \frac{5M}{384}\max_{0\le j\le n-1}(x_{j+1} - x_j)^4$$
■

وينتج أيضًا حد خطأ من الرتبة الرابعة، وينتج أيضًا في حالة الشروط الحدودية الحرّة، ولكن من الصعوبة صياغتها. (انظر [BD, pp. 827–835]).

ستعطي الشروط الحدودية الحرّة نتائج أقل دقةً مقارنةً بالشروط المتشابكة قرب طرفي الفترة $[x_0, x_n]$ ما لم تكن الدّالة f مقتربةً من تحقيق $f''(x_0) = f''(x_n) = 0$. ثمة بديل للشرط الحدودي الحرّ – ولا يتطلب معلومات عن مشتقة f– هو شرط اللاعقدة *not-a-knot* انظر ([Deb2, pp. 55–56]) . وهذا الشرط يتطلب كون $S'''(x)$ متصلة عند x_1 وعند x_{n-1}.

EXERCISE SET
مجموعة التمارين 4.3

1. حدِّد الشريحة التكعيبية الحرّة S التي تستكمل داخليًّا البيانات $f(0) = 0, f(1) = 1, f(2) = 2$.
2. حدِّد الشريحة التكعيبية المتشابكة S التي تستكمل داخليًّا البيانات $f(0) = 0, f(1) = 1, f(2) = 2$ وتحقّق $s'(0) = s'(2) = 1$.
3. أنشئ الشريحة التكعيبية الحرّة للبيانات الآتية:

أ.

x	$f(x)$
8.3	17.56492
8.6	18.50515

ب.

x	$f(x)$
0.8	0.22363362
1.0	0.65809197

ج.

x	$f(x)$
−0.5	−0.0247500
−0.25	0.3349375
0	1.1010000

د.

x	$f(x)$
0.1	−0.62049958
0.2	−0.28398668
0.3	0.00660095
0.4	0.24842440

4. أنشئ الشريحة التكعيبية الحرّة للبيانات الآتية:

أ.

x	$f(x)$
0	1.00000
0.5	2.71828

ب.

x	$f(x)$
−0.25	1.33203
0.25	0.800781

ج.

x	$f(x)$
0.1	−0.29004996
0.2	−0.56079734
0.3	−0.81401972

د.

x	$f(x)$
−1	0.86199480
−0.5	0.95802009
0	1.0986123
0.5	1.2943767

5. نتجت البيانات في التمرين (3) باستخدام الدّوال الآتية، استخدم الشرائح التكعيبية التي أنشئت في التمرين (3) لقيم x المبينة لتقريب $f(x)$ و $f'(x)$، واحسب الخطأ الحقيقي:





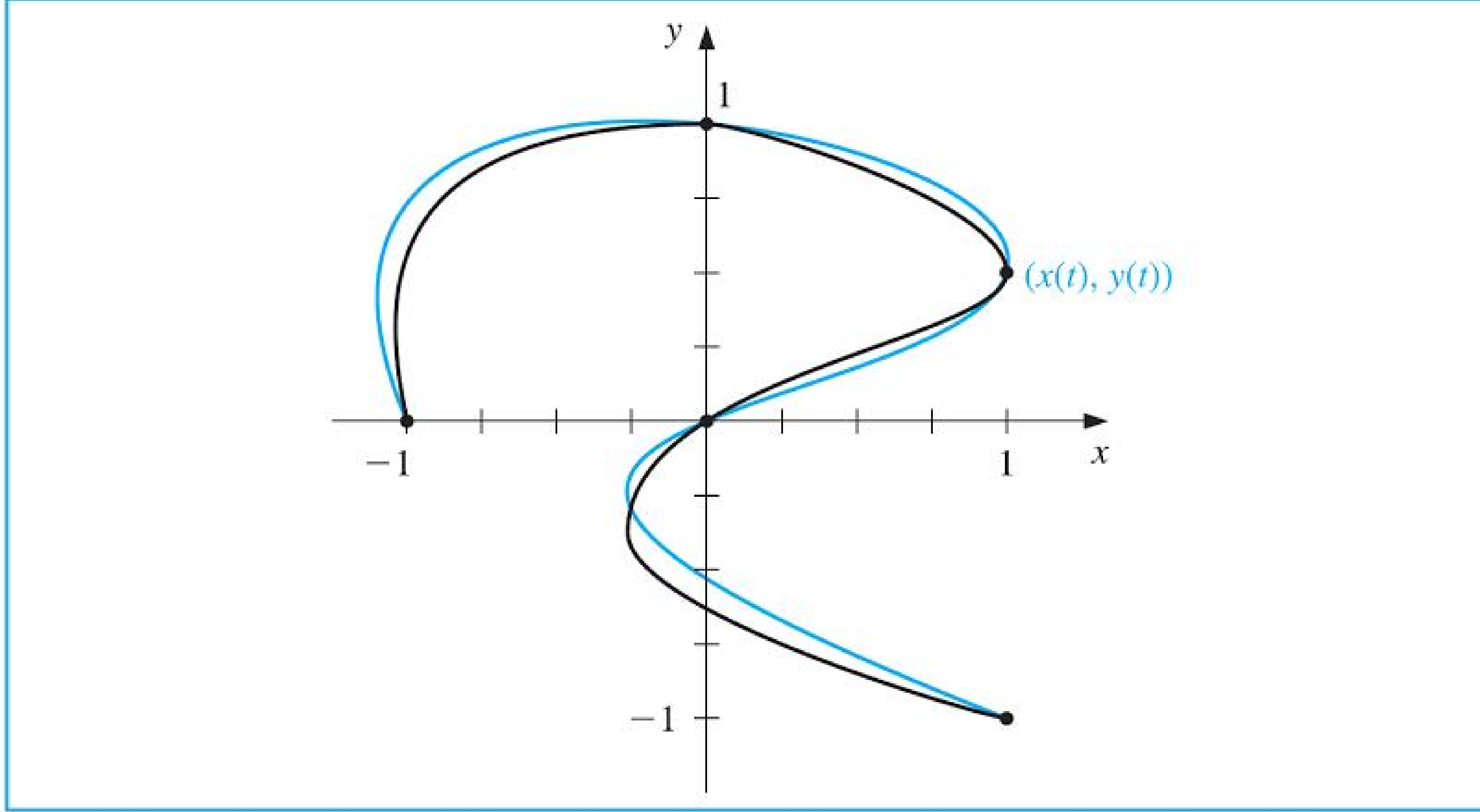






وعند رسم هذا النظام الوسيط نحصل على الشكل البياني الموضح بالأزرق في شكل (15.3). ومع أنه يمرّ عبر النقاط المطلوبة، وله الشكل الرئيس نفسه، فإنه لا يتعدى التقريب الخام (الابتدائي) للمنحنى الأصلي. سيتطلب التقريب الأدق نقاطًا إضافية، مع زيادة مرافقة بالحسابات.

شكل 15.3



إن نظامًا ناجحًا لرسوم الحاسوب يحتاج لأن يكون مبنيًا على أساس مبرهنة رياضية منتظمة بحيث تكون النتائج متوقعة، ولكن هذه المبرهنة يجب تطبيقها ضمن الخلفية بحيث يتمكن الرسام من تأسيس التصميم وفقًا للافتراض.

ويمكن توليد منحنيات هرمايت والشريحة بالأسلوب نفسه، ولكنها تتطلب جهودًا حسابية واسعة أيضًا. تتطلب التطبيقات في الرسوم الحاسوبية توليدًا سريعًا لمنحنيات ملساء يمكن تعديلها بسهولة وسرعة. ولغرض حسابي وجمالي؛ فإن تغيير جزء واحد من هذه المنحنيات يجب ألا يكون له أثر ولو قليلًا في بقية أجزائها. يلغي هذا استخدام كثيرات حدود استكمال داخلي أو الشرائح؛ لأن تغيير أحد الأجزاء يؤثر في المنحنى كله. إن اختيار منحنى الاستخدام في الرسم الحاسوبي يكون غالبًا عبارة عن صيغة لكثيرة حدود هرمايت التكعيبية المجزّأة. ويحدد كل جزء من كثيرة حدود هرمايت التكعيبية كليًّا من خلال وصف أطرافها والمشتقات عند الأطراف هذه. ويمكن لجزء واحد من المنحنى أن يتغير نتيجةً لذلك، حيث يترك غالبية المنحنى على حاله. وتحتاج الأجزاء المتجاورة إلى التعديل؛ لضمان الملوسة عند الأطراف فقط. ويمكن تنفيذ الحسابات سريعًا، ويمكن تعديل المنحنى جزءًا بعد آخر. تحتاج مشكلة استكمال هرمايت الداخلي إلى وصف المشتقات عند الأطراف لكل جزء من المنحنى. لنفترض أن المنحنى له $n+1$ من نقاط البيانات $(x(t_0), y(t_0)), \ldots, (x(t_n), y(t_n))$، ونرغب في تحديد معالم المكعب لاستيعاب سمات معقدة. ويجب وصف $x'(t_i)$ و $y'(t_i)$ لكل $i = 0, 1, \ldots, n$ بعد ذلك.

هذا ليس صعبًا على الصورة التي تبدو لنا؛ لأن كل جزء ينتج مستقلًا. وعلينا ضمان أن المشتقات عند الأطراف لكل جزء تماثل تلك التي في الجزء المجاور فقط. وأخيرًا نستطيع تبسيط العملية لتكون عبارة عن تحديد زوج من كثيرات حدود هرمايت التكعيبية في الوسيط t في الأساس، حيث إن $t_0 = 0$ و $t_1 = 1$ علمًا أن بيانات الأطراف $(x(0), y(0))$ و $(x(1), y(1))$ والمشتقات dy/dx (at $t = 0$) و dy/dx (at $t = 1$).

لاحظ أننا نعرّف ستة شروط فقط، وأن كثيرات الحدود التكعيبية في $x(t)$ و $y(t)$ لكل منها أربعة وسيطات، ليصبح المجموع ثمانية. وهذا يوفر مرونة في اختيار زوج من كثيرات حدود هرمايت التكعيبية لتحقيق الشروط؛ كون الصيغة الطبيعية لتحديد $x(t)$ و $y(t)$ تتطلب منا وصف $x'(0), x'(1), y'(0), y'(1)$. يتطلب منحنى هرمايت الواضح في x و y وصف المحصلات

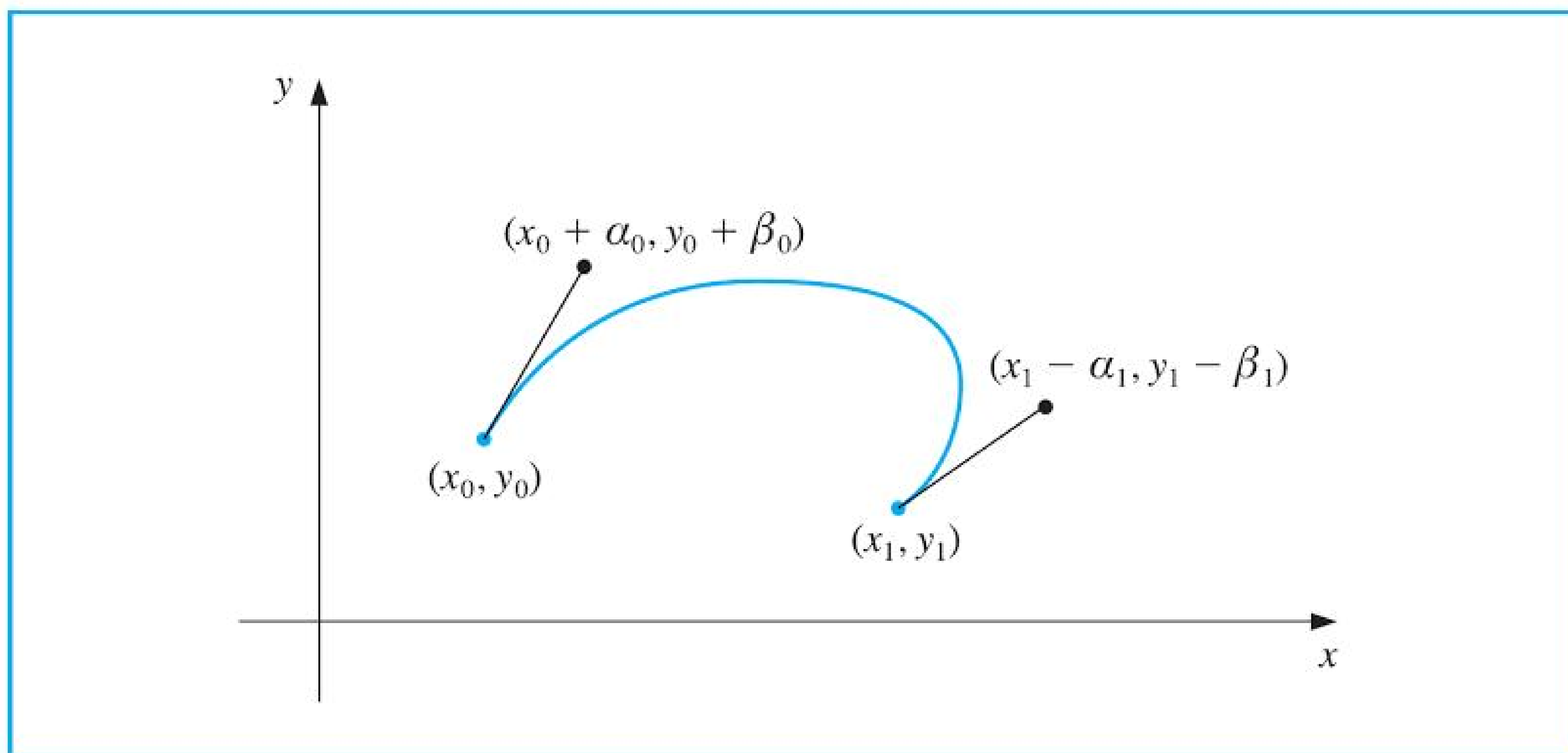
$$\frac{dy}{dx}(t=0)=\frac{y'(0)}{x'(0)} \quad \text{و} \quad \frac{dy}{dx}(t=1)=\frac{y'(1)}{x'(1)}$$ فقط.

وعند ضرب $x'(0)$ و $y'(0)$ في عامل قياس مشترك، فإن خط المماس للمنحنى عند $(x(0), y(0))$ يبقى نفسه، لكن يتغير شكل المنحنى. وكلما كان عامل القياس أكبر، يكون المنحنى أقرب في تقريب خط المماس من $(x(0), y(0))$. وتظهر حالة مشابهة عند نقطة النهاية الأخرى $(x(1), y(1))$. ولمزيد حول تبسيط العملية في الرسوم الحاسوبية المتداخلة، فإن المشتقة عند نقطة نهاية تبسط مستخدمة نقطة ثانية (وتدعى نقطة الدلالة *guidepoint*) على خط التماس المطلوب. وكلما كانت نقطة الدلالة بعيدة عن النقطة، أصبح بإمكان المنحنى تقريب خط المماس أكثر من النقاط.

تظهر النقاط عند (x_0, y_0) و (x_1, y_1) في شكل (16.3)، ونقطة الدلالة لـ (x_0, y_0) هي $(x_0+\alpha_0, y_0+\beta_0)$، ونقطة الدلالة لـ (x_1, y_1) هي $(x_1-\alpha_1, y_1-\beta_1)$. إن كثيرة حدود هرمايت التكعيبية $x(t)$ على $[0, 1]$ تحقّق

$$x(0)=x_0, \quad x(1)=x_1, \quad x'(0)=\alpha_0, \quad x'(1)=\alpha_1$$

شكل 16.3



وكثيرة الحدود الوحيدة التي تحقّق هذه الشروط هي

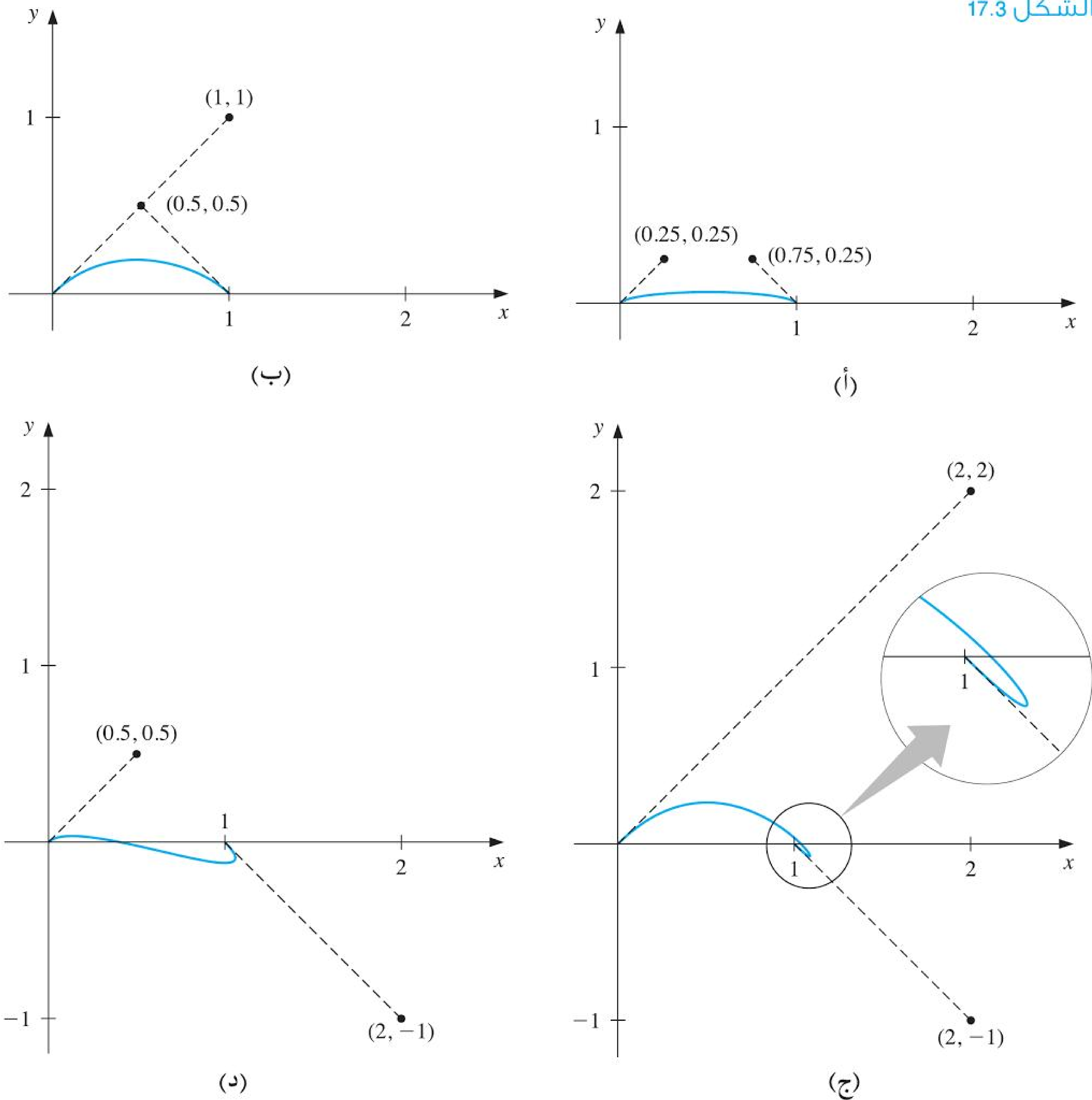
$$x(t)=[2(x_0-x_1)+(\alpha_0+\alpha_1)]t^3+[3(x_1-x_0)-(\alpha_1+2\alpha_0)]t^2+\alpha_0 t+x_0 \qquad (22.3)$$

وبالأسلوب نفسه، فإن كثيرة الحدود التكعيبية الوحيدة التي تحقّق

$$y(0)=y_0, \quad y(1)=y_1, \quad y'(0)=\beta_0, \quad y'(1)=\beta_1$$

تكون

$$y(t)=[2(y_0-y_1)+(\beta_0+\beta_1)]t^3+[3(y_1-y_0)-(\beta_1+2\beta_0)]t^2+\beta_0 t+y_0 \qquad (23.3)$$



مثال 2 تبين الرسوم البيانية في الشكل 17.3 بعض الإمكانات لمنحنيات أنتجت من خلال الصيغ (22.3) و (23.3) عندما تكون النقاط هي $(0, 0)$ و $(1, 0)$ ومقدار الميل عند هذه النقاط 1 و -1 على التوالي. إن تبيان الميل عند الأطراف يتطلب كون $\alpha_0 = \beta_0$ و $\alpha_1 = \beta_1$ فقط؛ لأن النسب α_0/β_0 و α_1/β_1 تعطي على التوالي الميل عند يسار الأطراف ويمينها. ■

والأسلوب المعياري لتحديد منحنيات في حالة رسوم بيانية متداخلة هو استخدام الفأرة أولاً أو كرة المسار **trackball** لتحديد النقاط ونقاط الدلالة لتوليد التقريب الأول للمنحنى. ويمكن تحديد هذه يدويًّا، ولكن معظم أنظمة الرسوم البيانية تسمح لك باستخدام جهاز الإدخال لرسم المنحنى على الشاشة تلقائيًّا، وسوف تختار النقاط ونقاط الدلالة المناسبة لهذا المنحنى التلقائي.

ويمكن المناورة بالنقاط ونقاط الدلالة فيما بعد لمواضع تستطيع إنتاج منحنى ذي شكل مقبول. ولكون الحسابات بحدها الأدنى، فإن المنحنى يمكن تحديده سريعًا، حيث يمكن فضلًا عن ذلك ملاحظة التغيير الناتج حالًا. والأكثر من ذلك، فإن جميع البيانات المطلوبة لحساب المنحنيات يتوقع وجودها في الإحداثيات ونقاط الدلالة، ولا يتطلب الأمر معرفة تحليلية لمستخدم النظام أخيرًا.

كان بيير آيتن بيزير (1910-1999) PierreEtienne Be'zier رئيسًا للتصميم والإنتاج في شركة رينو للسيارات معظم حياته المهنية. بدأ بحثه في التصميم المدعم بالحاسوب والتصنيع عام 1960، مطوِّرًا أدوات فاعلة في تصميم المنحنى والسطح وأسس طريقة توليد حاسوبية في ثلاثة اتجاهات (3D) لنماذج السيارات.

وتستخدم برامج الرسوم البيانية المشهورة هذا النوع من الأنظمة لتمثيل رسمها البياني التلقائي بصيغة صيغة إلى حد ما. وتكعيبيات هرمايت موضحة على أنها كثيرات حدود بيزير Be'zier التي تدخل عامل قياس 3 عند حساب الاشتقاقات عند نقاط النهاية. وهذا يختزل الصيغ الوسيطة إلى

$$x(t) = [2(x_0 - x_1) + 3(\alpha_0 + \alpha_1)]t^3 + [3(x_1 - x_0) - 3(\alpha_1 + 2\alpha_0)]t^2 + 3\alpha_0 t + x_0 \quad (24.3)$$

و

$$y(t) = [2(y_0 - y_1) + 3(\beta_0 + \beta_1)]t^3 + [3(y_1 - y_0) - 3(\beta_1 + 2\beta_0)]t^2 + 3\beta_0 t + y_0 \quad (25.3)$$

إلى $0 \le t \le 1$، لكن هذا التغيير يكون واضحًا لمستخدم النظام.

من إيجابيات منحنيات بيزير Be'zier التي تحمل اسمه، أنها تستند إلى مبرهنة رياضية دقيقة، ولا تحتاج لأن تكون ماثلة كليًّا أمام النقطة بالتطبيق الذي يريد عمل منحنى أو سطح تتحقق فيه الافتراضات. هذه المنحنيات هي القاعدة لنظام هوامش Adobe Postscript القوي، حيث تنتج المنحنيات آليًّا، وتظهر في العديد من برمجيات التصاميم الحاسوبية.

تُنشئ الخوارزمية (6.3) مجموعة منحنيات بيزير معتمدة على الصيغ الوسيطة في المعادلتين (24.3 و 25.3).



منحنى بيزير Be'zier Curve

لإنشاء منحنيات بيزير التكعيبية $C_0, \ldots, C_{n-1}$ بصيغة متغيّرة، بحيث C_i ممثَّلة كالآتي:

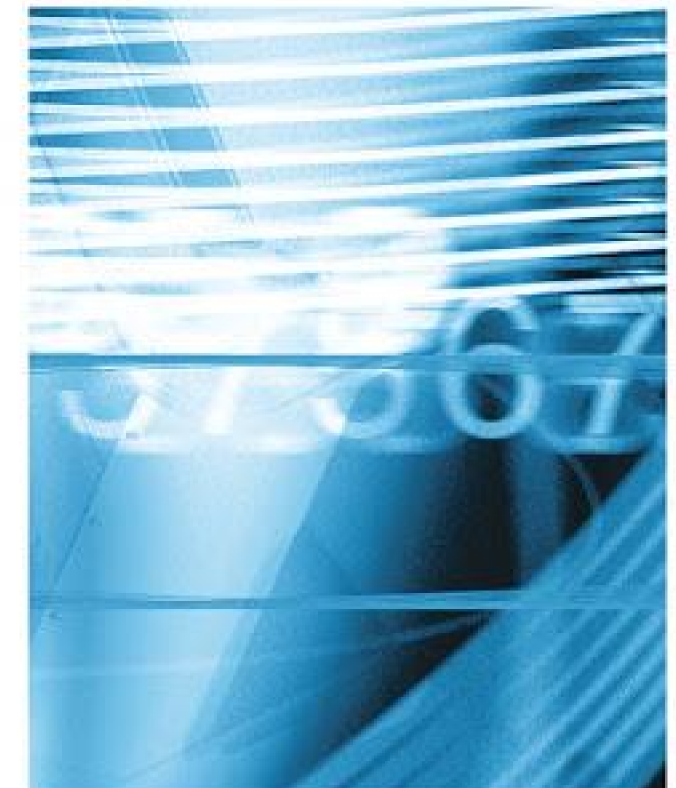
$$(x_i(t), y_i(t)) = \left(a_0^{(i)} + a_1^{(i)}t + a_2^{(i)}t^2 + a_3^{(i)}t^3, b_0^{(i)} + b_1^{(i)}t + b_2^{(i)}t^2 + b_3^{(i)}t^3\right)$$

لـ $0 \le t \le 1$، حيث إنها محددة بنقطة الطرف الأيسر (x_i, y_i)، نقطة الدلالة اليسرى (x_i^+, y_i^+) نقطة الطرف الأيمن (x_{i+1}, y_{i+1})، ونقطة الدلالة اليمنى (x_{i+1}^-, y_{i+1}^-) لكل $i = 0, 1, \ldots, n-1$

المدخلات: $n; (x_0, y_0), \ldots, (x_n, y_n); (x_0^+, y_0^+), \ldots, (x_{n-1}^+, y_{n-1}^+); (x_1^-, y_1^-), \ldots, (x_n^-, y_n^-)$

المخرجات: المعاملات $\{a_0^{(i)}, a_1^{(i)}, a_2^{(i)}, a_3^{(i)}, b_0^{(i)}, b_1^{(i)}, b_2^{(i)}, b_3^{(i)}$ لكل $0 \le i \le n-1\}$

الخطوة	المضمون
1	لكل $i = 0, 1, \ldots, n-1$، أنشئ الخطوتين 2 و 3.
2	ضع $a_0^{(i)} = x_i$ $b_0^{(i)} = y_i$ $a_1^{(i)} = 3(x_i^+ - x_i)$



2	$b_1^{(i)} = 3(y_i^+ - y_i)$ $a_2^{(i)} = 3(x_i + x_{i+1}^- - 2x_i^+)$ $b_2^{(i)} = 3(y_i + y_{i+1}^- - 2y_i^+)$ $a_3^{(i)} = x_{i+1} - x_i + 3x_i^+ - 3x_{i+1}^-$ $b_3^{(i)} = y_{i+1} - y_i + 3y_i^+ - 3y_{i+1}^-$
3	المخرجات $(a_0^{(i)}, a_1^{(i)}, a_2^{(i)}, a_3^{(i)}, b_0^{(i)}, b_1^{(i)}, b_2^{(i)}, b_3^{(i)})$.
4	توقف.

■

تتكون المنحنيات الثلاثية الأبعاد بطريقة مماثلة بواسطة تعيين مركبات إضافية لـ z_0 و z_1 للعقد، و $z_0 + \gamma_0$ و $z_1 - \gamma_1$ للنقاط الدالة. وتعتبر المسألة الصعبة المتضمنة تمثيل المنحنيات ثلاثية الأبعاد في فقدان البعد الثالث عند رسم المنحنى على شاشة الحاسوب ثنائية الأبعاد. تستخدم تقنيات متعددة ومختلفة، ولكن هذا الموضوع يقع ضمن واقع الرسوم البيانية الحاسوبية. وللحصول على مقدمة لهذا الموضوع وطرق إمكانية تعديل هذه التقنيات عند تمثيلها على السطوح المستوية، يرجى الرجوع إلى الكتب المتعددة حول أساليب رسومات الحاسوب البيانية مثل [Hill, F] أو [FVFH].

مجموعة التمارين 5.3 EXERCISE SET

1. لتكن $(x_0, y_0) = (0, 0)$ و $(x_1, y_1) = (5, 2)$ نقاط نهاية منحنى. استخدم نقاط الدلالة أدناه لإنشاء تقريبات هرمايت التكعيبية الوسيطة $(x(t), y(t))$ للمنحنى، وارسم التقريبات:

   أ. $(1, 1)$ و $(6, 1)$ ب. $(0.5, 0.5)$ و $(5.5, 1.5)$

   ج. $(1, 1)$ و $(6, 3)$ د. $(2, 2)$ و $(7, 0)$

2. كرّر التمرين (1) مستخدمًا كثيرات حدود بيزير التكعيبية.

3. أنشئ كثيرات حدود بيزير التكعيبية معتمدًا الأطراف ونقاط الدلالة الآتية وارسمها:

   أ. النقطة $(1, 1)$ مع نقطة دلالة $(1.5, 1.25)$ للنقطة $(6, 2)$ مع نقطة دلالة $(7, 3)$.

   ب. النقطة $(1, 1)$ مع نقطة دلالة $(1.25, 1.5)$ للنقطة $(6, 2)$ مع نقطة دلالة $(5, 3)$.

   ج. النقطة $(0, 0)$ مع نقطة دلالة $(0.5, 0.5)$ للنقطة $(4, 6)$ مع نقطة دلالة داخلة $(3.5, 7)$ ونقطة دلالة خارجة $(4.5, 5)$ للنقطة $(6, 1)$ مع نقطة دلالة $(7, 2)$.

   د. النقطة $(0, 0)$ مع نقطة دلالة $(0.5, 0.5)$ للنقطة $(2, 1)$ مع نقطة دلالة داخلة $(3, 1)$ ونقطة دلالة $(3, 1)$ للنقطة $(4, 0)$ مع نقطة دلالة داخلة $(1, 5)$ ونقطة دلالة $(3, -1)$ للنقطة $(6, -1)$ مع نقطة دلالة $(6.5, -0.25)$.

4. استخدم البيانات في الجدول الآتي والخوارزمية (6.3) لتقريب شكل الحرف $\mathscr{n}$:

i	x_i	y_i	α_i	β_i	α_i'	β_i'
0	3	6	3.3	6.5		
1	2	2	2.8	3.0	2.5	2.5
2	6	6	5.8	5.0	5.0	5.8
3	5	2	5.5	2.2	4.5	2.5
4	6.5	3			6.4	2.8

5. افترض أن كثيرة حدود بيزير التكعيبية قد وضعت عبر النقاط (u_0, v_0) و (u_3, v_3) مع نقاط دلالة (u_1, v_1) و (u_2, v_2) على التوالي.

أ. اشتق الصيغ الوسيطة لـ $u(t)$ و $v(t)$ مفترضًا أن

$$u(0) = u_0, \quad u(1) = u_3, \quad u'(0) = u_1 - u_0, \quad u'(1) = u_3 - u_2$$

و

$$v(0) = v_0, \quad v(1) = v_3, \quad v'(0) = v_1 - v_0, \quad v'(1) = v_3 - v_2$$

ب. لتكن $f(\frac{1}{3}i) = u_i$ لكل $i = 0, 1, 2, 3$ و $g(\frac{1}{3}i) = v_i$ لكل $i = 0, 1, 2, 3$. أثبت أن كثيرة حدود برنستاين من الرتبة 3 في t لـ f هي $u(t)$، وكثيرة حدود برنستاين من الرتبة 3 في t لِـ g هي $v(t)$.

(انظر تمرين 29 من الفصل 1.3)

6.3 مسح الطرائق والبرمجيات Survey Methods and Software

بحثنا في هذا الباب تقريب دالّة باستخدام كثيرات حدود وكثيرات حدود مجزّأة. ويمكن وصف الدّالة من خلال صيغة تعريفية أو من خلال تهيئة نقاط في السطح يمرّ من خلالها الشكل البياني للدّالة.

إن مجموعة النقاط $x_0, x_1, \ldots, x_n$ معطاة في كل حالة، وإن معلومات أخرى كقيمة مشتقات مختلفة، يمكن أن تكون ضمن المتطلبات أيضًا. نحن بحاجة إلى إيجاد دالّة تقريبية تحقّق الشروط المحددة من قبل هذه البيانات. إن كثيرة حدود استكمال داخلي $P(x)$ هي كثيرة حدود ذات أقل رتبة وتحقّق للدّالة f

$$P(x_i) = f(x_i) \text{ لكل } i = 0, 1, \ldots, n$$

ومع أن كثيرة الحدود هذه هي استكمال داخلي وحيد، فإنه يمكن أن تأخذ صيغًا مختلفة. وصيغة لاجرانج غالبًا ما تستخدم في جداول استكمال داخلي عندما تكون n صغيرة، وفي اشتقاق صيغ لتقريب المشتقات والتكاملات أيضًا. وتستخدم طريقة نيفيل في حساب الكثير من كثيرات الحدود المستكملة داخليًا عند نفس القيمة لـ x. وتكون صيغ نيوتن لكثيرات الحدود أكثر تناسبًا للحساب، وتستخدم على نحو واسع لاشتقاق صيغ لحل الصيغ التفاضلية أيضًا. ويتسم استكمال داخلي كثيرة حدود بحالة ضعف تكمن في التذبذب، خصوصًا إذا كان عدد النقاط كبيرًا. ويمكن تطبيق طرائق أخرى في هذه الحالة.

تستكمل كثيرات حدود هرمايت الدّالة ومشتقاتها عند النقاط داخليًا. ويمكن أن تكون دقيقة جدًا، لكن ذلك يتطلّب معلومات أكثر حول الدّالة المراد تقريبها. وعندما يكون هناك عدد كبير من النقاط، فإن كثيرات حدود هرمايت معرضة لحالة ضعف التذبذب أيضًا.

أكثر صيغ الاستكمال الداخلي شيوعًا في الاستخدام هي استكمال داخلي كثيرة حدود مجزّأة. فإذا توفّرت قيم الدّالة والمشتقة، فإنه ينصح باستكمال هرمايت الداخلي التكعيبي. إنها الطريقة الفضلى لقيم استكمال داخلي الدّالة، التي تمثّل حل صيغة الاشتقاق. وعندما لا يتوافر سوى قيم الدّالة، فإنه يمكن استخدام استكمال داخلي الشريحة التكعيبية الحرّة. هذا يجبر المشتقة الثانية للشريحة لتصبح صفرًا عند الأطراف. وتتطلب شرائح تكعيبية أخرى بيانات إضافية. ويحتاج الشريحة التكعيبية التشابكية إلى قيم مشتقة الدّالة عند الأطراف للفترة على سبيل المثال.

هناك طرائق استكمال داخلي أخرى شائعة الاستخدام مثل الاستكمال داخلي مثلثاتي، وبالتحديد

تحول فورير السريع Fast Fourier Transform الذي سيُتناوَل في الباب الثامن، ويستخدم مع كميات كبيرة من البيانات عندما تكون الدّالة ذا طبيعة دورية. ويستخدم الاستكمال الداخلي من خلال دوالّ معقولة أيضًا. وإذا حصل شك في دقة البيانات، فإن أساليب الملوسة يمكن تطبيقها، وينصح عندئذ باستخدام بعض صيغ المربعات الصغرى Least Squares لتوفيق البيانات مثل كثيرات حدود، دوالّ مثلثاتية، دوال معقولة، وشرائح يمكن استخدامها في المربعات الصغرى لتوفيق البيانات. وسوف نتناول هذه المواضيع في الباب الثامن. تستند برامج نمطية الاستكمال الداخلي في مكتبة IMSL إلى الكتاب

"*A Practical Guide to Splines* by Carl de Boor [Deb2]" واستخدام استكمال داخلي من خلال شرائح تكعيبية. ويُستخدم النمط البرامجي CSDEC لاستكمال داخلي من خلال شرائح تكعيبية مع شروط إنهاء تُتاح للمستخدم، CSPER هو لاستكمال داخلي من خلال شرائح تكعيبية مع شروط إنهاء دورية، وCSHER هو لاستكمال داخلي من خلال كثيرات حدود هرمايت شبه المجزأة. والنمط البرامجي CSDEC يدمج ما بين الخوارزميتين (4.3 و5.3). والنمط البرامجي CSINT يستخدم شرط اللاعقدة الذي ذُكر في نهاية الفصل (4.3). وهناك شرائح تكعيبية لتقليل التذبذبات والإبقاء على التقعر أيضًا. وطرائق استكمال داخلي في اتجاهين من خلال شرائح ثنائية التكعيب موجودة أيضًا.

تتضمن مكتبة NAG http://www.netlib.org برامج نمطية فرعية subroutines مثل EO1AEF لاستكمال داخلي كثيرات حدود وهرمايت، EO1BAF لاستكمال داخلي شرائحي تكعيبي و EO1BEF لاستكمال داخلي هرمايت التكعيبي المجزّأ. يُستخدم النمط البرامجي الفقرةي EO1ABF لاستكمال داخلي لبيانات عند نقاط متساوية التباعد. أما النمط البرامجي الفقرةي EO1AAF فيطبق على بيانات عند نقاط غير متساوية التباعد. ويتضمن NAG برامج نمطية جزئية لاستكمال داخلي من دوالّ بمتغيرين أيضًا.

وتحتوي المكتبة netlib على البرامج النمطية الجزئية cubsp1.f من خلال الحزمة pppack لحساب الشريحة التكعيبية مع شروط مختلفة الأطراف. ومن خلال الحزمة slatec، فإن polint.f يعطي معامل فروقات نيوتن المنقسمة لنقاط بيانات متقطعة (منفصلة)، ونجد برامج نمطية فرعية مختلفة لحساب كثيرات حدود هرمايت المجزأة من خلال الحزمة slatec/pchip.

ويمكن استخدام دالّة MATLAB التي هي INTERP1 لاستكمال داخلي لمجموعة نقاط بيانات متقطعة، باستخدام أقرب استكمال داخلي مجاور، أو استكمال داخلي خطي، أو استكمال شريحة داخلي تكعيبي، أو استكمال داخلي تكعيبي. مخرجات INTERP1 كثيرة حدود قيد الحساب عند مجموعة نقاط متقطعة. ويمكن استخدام POLYFIT المبني على تقريب المربعات الصغرى (انظر الفصل 1.8) لإيجاد دالّة استكمال داخلي من الرتبة n على الأكثر، ويمرّ عبر $n+1$ من النقاط المحددة. ويمكن إنتاج شرائح تكعيبية مع الدّالة SPLINE. يمكن استخدام Maple لإنشاء كثيرة حدود استكمال داخلي مستخدمًا الأوامر

```
>interp(X,Y,x);
```

حيث X عبارة عن النقطة [x[0], x[1],..., x[n]]

وY عبارة عن النقطة [f(x[0]), f(x[1]),..., f(x[n])]

وx هو المتغير قيد الاستخدام. ويمكن إنشاء الشريحة التكعيبية الطبيعية مع Maple أيضًا. أدخل أولا

```
>readlib(spline);
```

لجاهزية الحزمة. ومع X وY المبينين في المقطع السابق، فإن الأمر

```
>spline(X,Y,x,3);
```

تَنشأ الشريحة التكعيبية الطبيعية التي تستكمل داخليًّا

Y = [y[0],..., y[n]] و X = [x[0],..., x[n]]

حيث X هو المتغير، والعدد 3 يشير إلى رتبة الشريحة التكعيبية. ويمكن إيجاد شرائح خطية وتربيعية أيضًا.

المراجع العامة للطرائق في هذا الفصل من تأليف [Po] Powell و [Da] Davis وتعود الورقة حول الشرائح إلى [Scho] Schoenberg. هذه كتب مهمة حول الشرائح من تأليف Schultz [Schul], De Boor [Deb2], Diercx [Di], Schumaker [Schum].





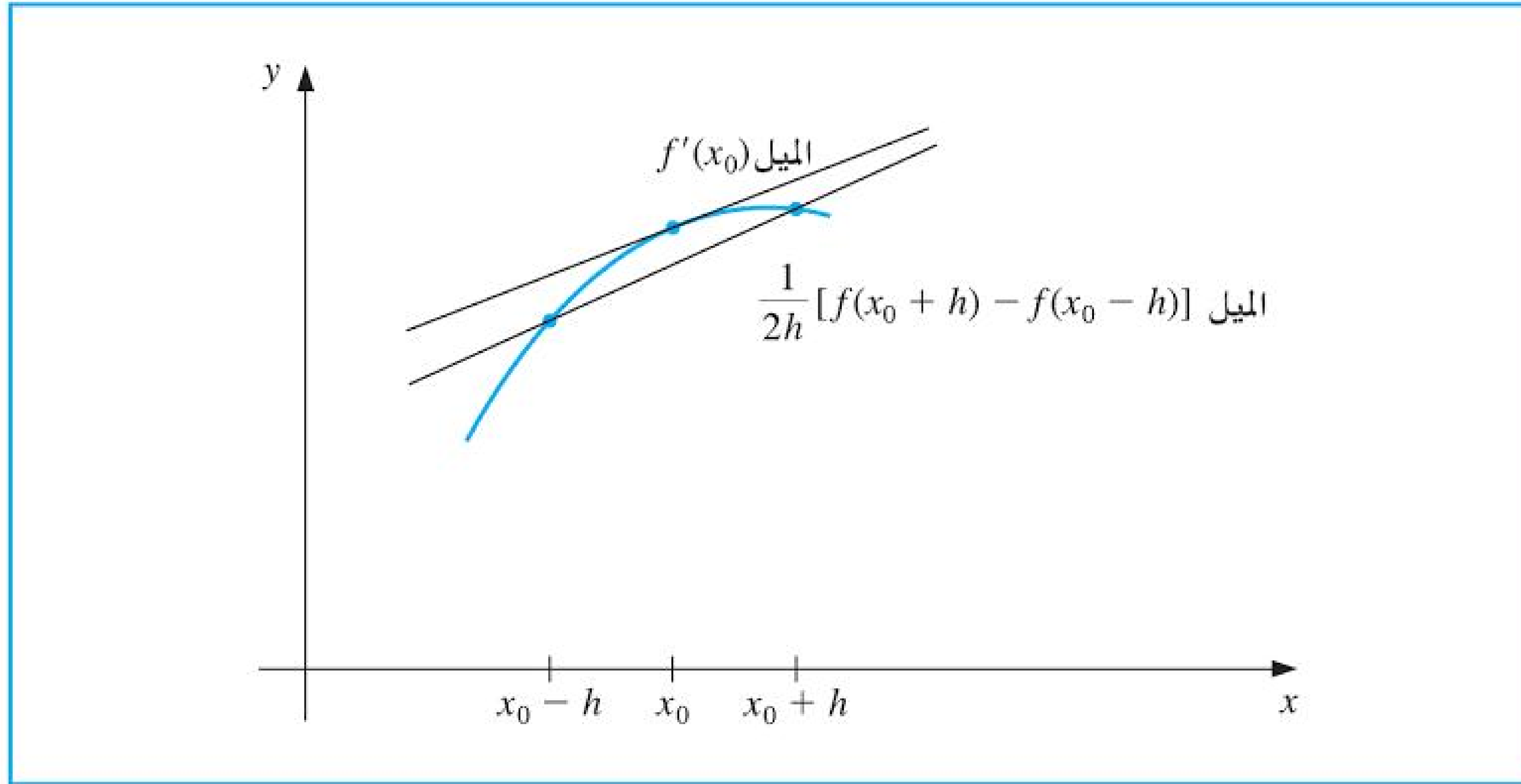






لاحظ أيضًا أن f يحتاج إلى نقطتين فقط في الصيغة (5.4)، حيث توجد حاجة إلى ثلاثة حسابات في الصيغة (4.4). ويُظهر شكل (2.4) شرحًا للتقريب الحاصل من الصيغة (5.4).

شكل 2.4



إن التقريب باستخدام الصيغة (4.4) مناسب بالقرب من نهايتي الفترة؛ لأن المعلومات عن f خارج الفترة قد تكون غير متاحة.

إن الطرائق المشروحة في المعادلتين (4.4) و (5.4) تسمى صيغ الثلاث نقاط (على الرغم من أن النقطة الثالثة $f(x_0)$ لا تظهر في الصيغة (5.4))، وبأسلوب مماثل فهناك صيغ الخمس نقاط، التي تستخدم قيمة الدّالة على نقطتين أخريين، إذ يكون حد الخطأ فيهما $O(h^4)$. وإحدى هذه الصيغ

$$f'(x_0) = \frac{1}{12h}[f(x_0-2h) - 8f(x_0-h) + 8f(x_0+h) - f(x_0+2h)] + \frac{h^4}{30}f^{(5)}(ξ) \quad (6.4)$$

حيث تقع ξ بين x_0-2h و x_0+2h، ويعطى اشتقاق هذه الصيغة في الفصل (2.4).

وإن صيغة الخمس نقاط الأخرى مناسبة لتقريبات نقطة الطرف، خصوصًا بشأن استكمال الشريحة التكعيبية التي درست في الفصل (3.4).

هذه الصيغة هي

$$f'(x_0) = \frac{1}{12h}[-25f(x_0) + 48f(x_0+h) - 36f(x_0+2h) + 16f(x_0+3h) - 3f(x_0+4h)] + \frac{h^4}{5}f^{(5)}(ξ) \quad (7.4)$$

حيث تقع ξ بين x_0 و x_0+4h.

يمكن إيجاد التقريبات على نقطة النهاية اليسرى باستخدام هذه الصيغة و $h>0$، أما التقريبات على نقطة الطرف الأيمن فيمكن إيجادها باستخدام $h<0$.

مثال 2

يُظهر جدول (2.4) قيمًا للدالّة $f(x) = xe^x$. بما أن المشتقة هي $f'(x) = (x+1)e^x$ فإن $f'(2.0) = 22.167168$. لإيجاد قيمة تقريبية للمقدار $f'(2.0)$؛ فإن استخدام صيغ الثلاث نقاط والخمس نقاط يظهر النتائج الآتية.

جدول 2.4

x	$f(x)$
1.8	10.889365
1.9	12.703199
2.0	14.778112
2.1	17.148957
2.2	19.855030

صيغ الثلاث نقاط Three-Point Formulas

باستخدام (4.4) مع $h = 0.1$: $\frac{1}{0.2}[-3f(2.0) + 4f(2.1) - f(2.2)] = 22.032310$

باستخدام (4.4) مع $h = -0.1$: $\frac{1}{-0.2}[-3f(2.0) + 4f(1.9) - f(1.8)] = 22.054525$

باستخدام (5.4) مع $h = 0.1$: $\frac{1}{0.2}[f(2.1) - f(1.9)] = 22.228790$

باستخدام (5.4) مع $h = 0.2$: $\frac{1}{0.4}[f(2.2) - f(1.8)] = 22.414163$

إن الأخطاء في هذه الصيغة هي تقريبًا

1.35×10^{-1} و 1.13×10^{-1} و -6.16×10^{-2} و -2.47×10^{-1} على التوالي.

صيغة الخمس نقاط Five-Point Formula

باستخدام الصيغة (6.4) مع $h = 0.1$ (صيغة الخمس نقاط الوحيدة الممكن تطبيقها)

$\frac{1}{1.2}[f(1.8) - 8f(1.9) + 8f(2.1) - f(2.2)] = 22.166999$

إن الخطأ في هذه الصيغة يساوي 1.69×10^{-4} تقريبًا.

من الواضح أن صيغة الخمس نقاط أفضل من الأخريات.

لاحظ أيضًا أن الخطأ في الصيغة (5.4) و $h = 0.1$ يساوي تقريبًا نصف قيمة الخطأ الناتج عن استخدام الصيغة (4.4) باختيار $h = 0.1$ أو $h = -0.1$. ■

يمكن اشتقاق طرائق صالحة لإيجاد تقريبات للمشتقات العليا للدالة، وذلك باستخدام قيم للدالّة عند نقاط مختلفة وموضوعة على شكل جدول.

وعلى كل حال فالاشتقاق مُضن جبريًّا، ولذلك سنشرح فقط طريقة ممثلة لهذه العمليات.

ابدأ بتمثيل الدّالة f بكثيرة حدود تايلور من الرتبة الثالثة حول نقطة x_0، وأوجد التقييم عند $x_0 + h$ و $x_0 - h$. إذن

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + f'(x_0)h + \tfrac{1}{2}f''(x_0)h^2 + \tfrac{1}{6}f'''(x_0)h^3 + \tfrac{1}{24}f^{(4)}(\xi_1)h^4$$

و

$$f(x_0 - h) = f(x_0) - f'(x_0)h + \tfrac{1}{2}f''(x_0)h^2 - \tfrac{1}{6}f'''(x_0)h^3 + \tfrac{1}{24}f^{(4)}(\xi_{-1})h^4$$

حيث $x_0 - h < \xi_{-1} < x_0 < \xi_1 < x_0 + h$

إذا جمعنا هذه الصيغ فإن الحدود التي تحوي $f'(x_0)$ و $f'''(x_0)$ يلغي بعضها بعضًا ونحصل على

$$f(x_0 + h) + f(x_0 - h) = 2f(x_0) + f''(x_0)h^2 + \tfrac{1}{24}[f^{(4)}(\xi_1) + f^{(4)}(\xi_{-1})]h^4$$

وبحل هذه الصيغة لإيجاد $f''(x_0)$ نحصل على

$$f''(x_0) = \frac{1}{h^2}[f(x_0 - h) - 2f(x_0) + f(x_0 + h)] - \frac{h^2}{24}[f^{(4)}(\xi_1) + f^{(4)}(\xi_{-1})] \qquad (8.4)$$

افترض أن $f^{(4)}$ متصلة عند $[x_0 - h, x_0 + h]$.

بما أن $\frac{1}{2}[f^{(4)}(\xi_1) + f^{(4)}(\xi_{-1})]$ تقع بين $f^{(4)}(\xi_1)$ و $f^{(4)}(\xi_{-1})$، فإن مبرهنة القيمة الوسطية تضمن وجود عدد ξ بين ξ_1 و ξ_{-1}، ومن ثم ففي الفترة $(x_0 - h, x_0 + h)$ يكون

$$f^{(4)}(\xi) = \tfrac{1}{2}\left[f^{(4)}(\xi_1) + f^{(4)}(\xi_{-1})\right]$$

إن هذا يسمح لنا بإعادة كتابة الصيغة (8.4) على الصيغة

$$f''(x_0) = \frac{1}{h^2}[f(x_0 - h) - 2f(x_0) + f(x_0 + h)] - \frac{h^2}{12}f^{(4)}(\xi) \qquad (9.4)$$

لقيمة ما ξ حيث $x_0 - h < \xi < x_0 + h$. بما أن $f^{(4)}$ متصلة على الفترة $[x_0 - h, x_0 + h]$ فإنها محدودة، ومن ثم يكون التقريب $O(h^2)$.

مثال 3 بالعودة إلى البيانات في مثال (2) للدالّة $f(x) = xe^x$ يمكن أن نستخدم الصيغة (9.4) لتقريب $f''(2.0)$. وبما أن $f''(x) = (x+2)e^x$ فإن القيمة الحقيقية هي $f''(2.0) = 29.556224$.

باستخدام الصيغة (9.4) و $h = 0.1$ نحصل على

$$f''(2.0) \approx \frac{1}{0.01}[f(1.9) - 2f(2.0) + f(2.1)] = 29.593200$$

باستخدام الصيغة (9.4) و $h = 0.2$ نجد أن

$$f''(2.0) \approx \frac{1}{0.04}[f(1.8) - 2f(2.0) + f(2.2)] = 29.704275$$

وتكون الأخطاء -3.70×10^{-2} و -1.48×10^{-1} تقريبًا على التوالي. ■

إنه من المهم على نحو خاص أن نهتم بتدوير الخطأ عند تقريب المشتقات. ولشرح هذا الوضع دعنا نتفحص الصيغة (5.4) على نحو أدق.

$$f'(x_0) = \frac{1}{2h}[f(x_0 + h) - f(x_0 - h)] - \frac{h^2}{6}f^{(3)}(\xi_1)$$

افترض أنه عند إيجاد قيمة $f(x_0 + h)$ و $f(x_0 - h)$ حصلنا على أخطاء التدوير $e(x_0 + h)$ و $e(x_0 - h)$، عندئذ تكون القيم التي حسبناها $\tilde{f}(x_0 + h)$ و $\tilde{f}(x_0 - h)$ مرتبطة بالقيم الحقيقية $f(x_0 + h)$ و $f(x_0 - h)$ في الصيغ الآتية

$$f(x_0 + h) = \tilde{f}(x_0 + h) + e(x_0 + h)$$

و

$$f(x_0 - h) = \tilde{f}(x_0 - h) + e(x_0 - h)$$

إن الخطأ التام في التقريب، أي

$$f'(x_0) - \frac{\tilde{f}(x_0 + h) - \tilde{f}(x_0 - h)}{2h} = \frac{e(x_0 + h) - e(x_0 - h)}{2h} - \frac{h^2}{6}f^{(3)}(\xi_1)$$

يحصل جزئيًا بسبب خطأ التقدير، وبسبب جزئي آخر هو خطأ القطع.

إذا افترضنا أن أخطاء التدوير $e(x_0 \pm h)$ محدودة بعدد ما $\varepsilon > 0$، وأن المشتقة الثالثة للدالّة f محدودة بعدد ما $M > 0$ فإن

$$\left| f'(x_0) - \frac{\tilde{f}(x_0 + h) - \tilde{f}(x_0 - h)}{2h} \right| \le \frac{\varepsilon}{h} + \frac{h^2}{6}M$$

ولتخفيض خطأ القطع $h^2M/6$ يجب تخفيض h. ولكن بتخفيض h فإن خطأ التدوير ε/h يزداد. وفي الحالات العملية فإن من النادر وجود ميزة في اختيار قيمة صغيرة جدًّا للعدد h؛ وذلك لأن خطأ التدوير يسيطر على الحسابات.

مثال 4

افترض القيم في جدول (3.4) التي حسبت لتقريب $f'(0.900)$ حيث $f(x) = \sin x$. إن القيمة الحقيقية هي $\cos 0.900 = 0.62161$. باستخدام الصيغة

$$f'(0.900) \approx \frac{f(0.900 + h) - f(0.900 - h)}{2h}$$

وباختبار قيم مختلفة للعدد h، نحصل على الإجابات التقريبية في جدول (4.4).

جدول 3.4

x	$\sin x$	x	$\sin x$
0.800	0.71736	0.901	0.78395
0.850	0.75128	0.902	0.78457
0.880	0.77074	0.905	0.78643
0.890	0.77707	0.910	0.78950
0.895	0.78021	0.920	0.79560
0.898	0.78208	0.950	0.81342
0.899	0.78270	1.000	0.84147

جدول 4.4

h	التقدير إلى $f'(0.900)$	الخطأ
0.001	0.62500	0.00339
0.002	0.62250	0.00089
0.005	0.62200	0.00039
0.010	0.62150	− 0.00011
0.020	0.62150	− 0.00011
0.050	0.62140	− 0.00021
0.100	0.62055	− 0.00106

إن الاختبار الأمثل للعدد h يظهر أنه يقع بين 0.005 و 0.05. وإذا ما أجرينا بعض التحليلات على حد الخطأ

$$e(h) = \frac{\varepsilon}{h} + \frac{h^2}{6}M$$

فبإمكاننا استخدام حساب التفاضل والتكامل (انظر التمرين 29) للتحقق من أن أصغر قيمة للخطأ e يحدث عندما $h = \sqrt[3]{3\varepsilon/M}$ حيث

$$M = \max_{x\in[0.800,1.00]} |f'''(x)| = \max_{x\in[0.800,1.00]} |\cos x| = \cos 0.8 \approx 0.69671$$

وبما أن قيم f معطاة لخمس منازل، فإننا نفترض أن خطأ التدوير محدود بالقيمة $\varepsilon = 0.000005$ ولذلك فالاختيار الأمثل للعدد h يكون تقريبًا

$$h = \sqrt[3]{\frac{3(0.000005)}{0.69671}} \approx 0.028$$

الذي هو متلائم مع النتائج في جدول (4.4).

من جانب عملي لا نستطيع حساب قيمة h الفضلى لنستخدمها لإيجاد تقريب للمشتقة؛ وذلك لعدم وجود أي معرفة لدينا عن المشتقة الثالثة للدالة. ■

ولكن يجب أن نبقى يقظين من أن تقليل حجم الخطوات لا يحسّن دائمًا التقريب الذي نحصل عليه.

لقد ناقشنا فقط مسائل خطأ التدوير الناتجة من استخدام صيغة النقاط الثلاث (5.4)، ولكن هناك صعوبات مماثلة تحدث مع جميع صيغ الاشتقاق.

يمكن تتبع السبب حتى نصل إلى مدى الحاجة إلى القسمة على قوى h. وكما وجدنا في الفصل (2.1) (انظر المثال (3) خصوصًا) فإن القسمة على أعداد صغيرة تميل إلى المبالغة في خطأ التدوير ويجب تجنب هذه العملية إذا أمكن.

وفي حالة الاشتقاق العددي لا يمكن تجنب المسألة بالكامل، مع أن الطرائق ذات الرتب الأعلى تحد من هذه الصعوبة.

تذكر أن طرائق الفرق للتقريب يمكن أن تكون غير مستقرة.

وبالنظر إلى الاشتقاق العددي بوصفه طرائق تقريب نجده غير مستقر؛ لأن قيم h الصغيرة التي نحتاج إليها لتصغير خطأ القطع تجعل خطأ التدوير يزداد أيضًا.

إن هذه أول مجموعة من الطرائق غير المستقرة التي تعرضنا لها، ويجب تجنب هذه الطرائق إذا كان ذلك ممكناً. وعلى كل حال فبالإضافة إلى أن هذه الصيغ تستخدم لأغراض حسابية، فإننا نحتاج إليها لتقريب حلول الصيغ التفاضلية العادية والصيغ التفاضلية الجزئية.

مجموعة التمارين 1.4 EXERCISE SET

1. استخدم صيغ الفرق الأمامي والفرق الخلفي لتحديد كل مدخل ناقص في الجداول الآتية:

أ.

x	$f(x)$	$f'(x)$
0.5	0.4794	
0.6	0.5646	
0.7	0.6442	

ب.

x	$f(x)$	$f'(x)$
0.0	0.00000	
0.2	0.74140	
0.4	1.3718	

2. استخدم صيغ الفرق الأمامي والفرق الخلفي لتحديد المدخل المفقود في الجداول الآتية:

أ.

x	$f(x)$	$f'(x)$
−0.3	1.9507	
−0.1	2.0421	
−0.1	2.0601	

ب.

x	$f(x)$	$f'(x)$
1.0	1.0000	
1.2	1.2625	
1.4	1.6595	

3. إن البيانات في التمرين (1) أخذت من الدّوال الآتية، احسب الأخطاء الفعلية في التمرين (1) أوجد حدود الخطأ باستخدام صيغ الخطأ:

أ. $f(x) = \sin x$ ب. $f(x) = e^x - 2x^2 + 3x - 1$

4. إن البيانات في التمرين (2) أخذت من الدّوال الآتية، احسب الأخطاء الفعلية في التمرين (2) أوجد حدود الخطأ باستخدام صيغ الخطأ

أ. $f(x) = 2\cos 2x - x$ ب. $f(x) = x^2 \ln x + 1$

5. استخدم صيغة النقاط الثلاث الأدق لتحديد كل مدخل مفقود في الجداول الآتية:

أ.

x	$f(x)$	$f'(x)$
1.1	9.025013	
1.2	11.02318	
1.3	13.46374	
1.4	16.44465	

ب.

x	$f(x)$	$f'(x)$
8.1	16.94410	
8.3	17.56492	
8.5	18.19056	
8.7	18.82091	

جـ.

x	$f(x)$	$f'(x)$
2.9	−4.827866	
3.0	−4.240058	
3.1	−3.496909	
3.2	−2.596792	

د.

x	$f(x)$	$f'(x)$
2.0	3.6887983	
2.1	3.6905701	
2.2	3.6688192	
2.3	3.6245909	

6. استخدم صيغة النقاط الثلاث الأدق لتحديد كل مدخل مفقود في الجداول الآتية:

أ.

x	$f(x)$	$f'(x)$
−0.3	−0.27652	
−0.2	−0.25074	
−0.1	−0.16134	
0	0	

ب.

x	$f(x)$	$f'(x)$
7.4	−68.3193	
7.6	−71.6982	
7.8	−75.1576	
8.0	−78.6974	

جـ .

x	$f(x)$	$f'(x)$
-0.3	-0.27652	
-0.2	-0.25074	
-0.1	-0.16134	
0	0	

د .

x	$f(x)$	$f'(x)$
7.4	-68.3193	
7.6	-71.6982	
7.8	-75.1576	
8.0	-78.6974	

7. إن البيانات في التمرين (5) أخذت من الدّوال الآتية، احسب الأخطاء الفعلية في التمرين (5) أوجد حدود الخطأ باستخدام صيغ الخطأ:

أ. $f(x) = e^{2x}$ ب. $f(x) = x \ln x$

ج. $f(x) = x \cos x - x^2 \sin x$ د. $f(x) = 2(\ln x)^2 + 3 \sin x$

8. إن البيانات في التمرين (5) أخذت من الدّوال الآتية، احسب الأخطاء الفعلية في التمرين (5) أوجد حدود الخطأ باستخدام صيغ الخطأ:

أ. $f(x) = e^{2x} - \cos 2x$ ب. $f(x) = \ln(x + 2) - (x + 1)^2$

ج. $f(x) = x \sin x + x^2 \cos x$ د. $f(x) = (\cos 3x)^2 - e^{2x}$

9. استخدم الصيغ المعطاة في هذا الفصل لتحديد التقريب بالدقة المكنة لكل مدخل مفقود في الجداول الآتية:

أ.

x	$f(x)$	$f'(x)$
2.1	-1.709847	
2.2	-1.373823	
2.3	-1.119214	
2.4	-0.9160143	
2.5	-0.7470223	
2.6	-0.6015966	

ب.

x	$f(x)$	$f'(x)$
-3.0	9.367879	
-2.8	8.233241	
-2.6	7.180350	
-2.4	6.209329	
-2.2	5.320305	
-2.0	4.513417	

10. استخدم الصيغ المعطاة في هذا الفصل لتحديد التقريب بالدقة المكنة لكل مدخل مفقود في الجداول الآتية:

أ.

x	$f(x)$	$f'(x)$
1.05	-1.709847	
1.10	-1.373823	
1.15	-1.119214	
1.20	-0.9160143	
1.25	-0.7470223	
1.30	-0.6015966	

ب.

x	$f(x)$	$f'(x)$
-3.0	16.08554	
-2.8	12.64465	
-2.6	9.863738	
-2.4	7.623176	
-2.2	5.825013	
-2.0	4.389056	

11. إن البيانات في تمرين (9) أخذت من الدّوال الآتية، احسب الأخطاء الفعلية في تمرين (9) أوجد حدود الخطأ باستخدام صيغ الخطأ:

أ. $f(x) = \tan x$ ب. $f(x) = e^{x/3} + x^2$

12. إن البيانات في تمرين (10) أخذت من الدّوال الآتية، احسب الأخطاء الفعلية في تمرين (10) أوجد حدود الخطأ باستخدام صيغ الخطأ:

أ. $f(x) = \tan 2x$ ب. $f(x) = e^{-x} - 1 + x$

13. استخدم البيانات الآتية والمعلومة: المشتقات الخمس الأولى للدالّة f محدودة على الفترة $[1, 5]$ بالقيم 2، 3، 6، 12 و 23 على التوالي، وذلك لتقريب $f'(3)$ بالدقة الممكنة. أوجد حدًّا للخطأ.

x	1	2	3	4	5
$f(x)$	2.4142	2.6734	2.8974	3.0976	3.2804

14. كرّر تمرين (13) ولكن على فرض أن المشتقة الثالثة للدالّة f على $[1, 5]$ محدودة بالعدد 4.

15. كرّر تمرين (1) باستخدام حساب التدوير لأربعة أرقام، وقارن الأخطاء بتلك التي حصلت عليها في التمرين (3).

16. كرّر تمرين (5) باستخدام حساب القطع لأربعة أرقام، وقارن الأخطاء بتلك التي حصلت عليها في التمرين (7).

17. كرّر تمرين (9) باستخدام حساب التدوير لأربعة أرقام، وقارن الأخطاء بتلك التي حصلت عليها في التمرين (11).

18. لديك البيانات في جدول الآتي:

x	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0
$f(x)$	0.9798652	0.9177710	0.808038	0.6386093	0.3843735

أ. استخدم الصيغ المناسبة جميعها في هذا الفصل لتقريب $f'(0.4)$ و $f''(0.4)$.
ب. استخدم الصيغ المناسبة جميعها في هذا الفصل لتقريب $f'(0.6)$ و $f''(0.6)$.

19. ليكن $f(x) = \cos \pi x$. استخدم الصيغة (9.4) وقيم $f(x)$ على النقاط $x = 0.25, 0.5$ و 0.75 لتقريب $f''(0.5)$. قارن هذه النتيجة بالقيمة الحقيقية وكذلك بالتقريب الناتج في التمرين (15) من الفصل (3.4)، اشرح سبب كون هذه الطريقة على نحو خاص دقيقة في حل هذه المسألة أوجد حدًّا للخطأ.

20. ليكن $f(x) = 3xe^x - \cos x$ استخدم البيانات الآتية والصيغة (9.4) لتقريب $f''(1.3)$ باختيار $h = 0.1$ و $h = 0.01$

x	1.20	1.29	1.30	1.31	1.40
$f(x)$	11.59006	13.78176	14.04276	14.30741	16.86187

قارن نتائجك بقيمة $f''(1.3)$.

21. لديك جدول البيانات الآتية:

x	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0
$f(x)$	0.9798652	0.9177710	0.8080348	0.6386093	0.3843735

أ. استخدم الصيغة (4.7) لتقريب $f'(0.2)$.
ب. استخدم الصيغة (4.7) لتقريب $f'(1.0)$.
ج. استخدم الصيغة (4.6) لتقريب $f'(0.6)$.

22. اشتق صيغة خمس نقاط من الرتبة $O(h^4)$ لتقريب $f'(x_0)$ التي تستخدم

$$f(x_0 - h),\ f(x_0),\ f(x_0 + h),\ f(x_0 + 2h) \text{ و } f(x_0 + 3h)$$

[إضاءة: خذ التعبير $Af(x_0 - h) + Bf(x_0 + h) + Cf(x_0 + 2h) + Df(x_0 + 3h)$، استخدم امتداد كثيرة حدود تايلور الرابعة، واختر قيم A, B, C, D اختيارًا مناسبًا.]

23. استخدم الصيغة التي اشتُقَّت في التمرين (22) والبيانات في التمرين (21) لتقريب $f'(0.4)$ و $f'(0.8)$.

24. أ. حلّل أخطاء التدوير كما في المثال (4) للصيغة $f'(x_0) = \dfrac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} - \dfrac{h}{2} f''(\xi_0)$
ب. أوجد أفضل $h > 0$ للدالة في المثال (2).

25. لقد أعطيت في التمرين (10) من الفصل (3.3) بيانات تصف سيارة تسير على طريق مستقيم. لقد طلب ذلك التمرين التنبؤ بمكان السيارة وسرعتها عند $t = 10\,\text{s}$. استخدم الأوقات والأمكنة الآتية للتنبؤ بالسرعة عند كل زمن معطى.

الوقت	0	3	5	8	10	13
المسافة	0	225	383	623	742	993

26. يعطي القانون الأول لكيرتشوف (Kirchoff) العلاقة $\mathcal{E}(t) = L\dfrac{di}{dt} + Ri$
وذلك في الدائرة الكهربائية التي فيها جهد مكثّف $\mathcal{E}(t)$، وتوصيل L، ومقاومة في الدائرة R والتيار i.

افترض أننا قسنا التيار لقيم متعددة لـ t وحصلنا على

t	1.00	1.01	1.02	1.03	1.0
i	3.10	3.12	3.14	3.18	3.24

حيث قيست t بالثواني و i بالأمبيرات، وثابت التوصيل $L = 0.98$ هنري والمقاومة تساوي 0.142 أوم. أعطِ تقريبًا لقيمة الجهد $\mathcal{E}(t)$ عندما $t = 1.00, 1.01, 1.02, 1.03, 1.04$.

27. يعرف طلاب التفاضل والتكامل جميعهم أنه يمكن تعريف مشتقة أي f عند x، ومن ثم

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

اختر دالّةً المفضل f، وقيمة x غير الصفرية، واستخدم الحاسوب أو حساب التفاضل والتكامل. ولّد تقريبات $f_n'(x)$ للمشتقة $f'(x)$ باستخدام الصيغة

$$f_n'(x) = \frac{f(x+10^{-n}) - f(x)}{10^{-n}}$$

للقيم $n = 1, 2, \ldots, 20$ جميعها، وصف ماذا يحدث.

28. اشتق طريقة لتقريب $f'''(x_0)$ بحيث يكون حد الخطأ من الرتبة h^2، وذلك بفك الدّالة f بكثيرة حدود تايلور من الرتبة الرابعة حول x_0 وإيجاد القيم عند $x_0 \pm h$ و $x_0 \pm 2h$.

29. لديك الدّالة $e(h) = \frac{\varepsilon}{h} + \frac{h^2}{6}M$ حيث M هي للمشتقة الثالثة لدالّة ما. برهن أن $e(h)$ لها قيمة صغرى عند $\sqrt[3]{3\varepsilon/M}$.

2.4 استكمال ريتشاردسون الخارجي Richardson's Extrapolation

لويس فراي ريتشاردسون Lewis Fry Richardson (1881-1953) كان أول شخص طبق الرياضيات على نحو منظم على موضوع التنبؤ الجوي بينما كان يعمل لمكتب الأحوال الجوية في إنجلترا. وبوصفه معارضًا أخلاقيًا للحرب العالمية الأولى فقد كتب على نحو مستفيض عن التدمير الاقتصادي الناشئ عن الحرب، مستخدمًا نظم المعادلات التفاضلية لإيجاد أنموذج منطقي للتفاعلات بين الدول.

إن طريقة الاستيفاء الخارجي المقترنة باسمه كانت إعادة اكتشاف طريقة تعود جذورها على الأقل إلى عصر كريستيان هاجينس Christian Huygens (1629-1695) وربما إلى عصر أرخميدس Archimedes (287-212 BCE).

تستخدم استكمال ريتشاردسون الخارجي لتوليد نتائج عالية الدقة، ولكن باستخدام صيغ ذات رتب منخفضة.

وعلى الرغم من أن اسم الطريقة مرتبط ببحث نشره ريتشاردسون غونت [RG] عام 1927، إلا أن فكرتها قديمة، فهناك مقالة ممتعة حول تاريخ الاستكمال الخارجي، وتطبيقاته موجودة في [Joy].

ويمكننا استخدام الاستكمال الخارجي عندما نعلم أن طريقة التقريب تنتج حد خطأ ذا شكل قابل للتنبؤ، وهي الطريقة التي تعتمد على الوسيط (براميتر) الذي عادة ما تكون الخطوة h.

افترض أن لدينا لكل عدد $h \neq 0$ صيغة $N(h)$ الذي تعطي تقريبًا للقيمة M، وأن خطأ القطع المرتبط بالتقريب له الصيغة

$$M - N(h) = K_1h + K_2h^2 + K_3h^3 + \cdots$$

لمنظومة من الثوابت المجهولة $K_1, K_2, K_3, \ldots$.

بما أن خطأ القطع $O(h)$ فإننا نتوقع على سبيل المثال أنّ

$$M - N(0.1) \approx 0.1K_1, \quad M - N(0.01) \approx 0.01K_1$$

وعمومًا $M - N(h) \approx K_1h$ إلا إذا كان هناك تغير كبير في المقدار بين الثوابت $K_1, K_2, K_3, \ldots$.

وإن الغرض من الاستكمال الخارجي هو إيجاد طريقة سهلة لدمج التقريبات غير الصحيحة إلى





وبما أن صيغة الخطأ هذه تحوي قوى h الزوجية فقط، فإن الاستكمال الخارجي يكون أكثر كفاءة مما لُخِّص في بداية النقاش.

في هذه الحالة يكون لدينا التقريب من الرتبة $O(h^2)$

$$f'(x_0) = N_1(h) - \frac{h^2}{6}f'''(x_0) - \frac{h^4}{120}f^{(5)}(x_0) - \cdots \qquad (15.4)$$

حيث

$$N_1(h) \equiv N(h) = \frac{1}{2h}[f(x_0+h) - f(x_0-h)]$$

وإن تعويض $h/2$ بدلاً من h في هذه الصيغة ينتج التقريب

$$f'(x_0) = N_1\left(\frac{h}{2}\right) - \frac{h^2}{24}f'''(x_0) - \frac{h^4}{1920}f^{(5)}(x_0) - \cdots$$

وبطرح الصيغة (15.4) من 4 أمثال هذه الصيغة نتخلص من الحد $O(h^2)$ الذي يحتوي $f'''(x_0)$ ويعطي

$$3f'(x_0) = 4N_1\left(\frac{h}{2}\right) - N_1(h) + \frac{h^4}{160}f^{(5)}(x_0) + \cdots$$

وبالقسمة على 3 نحصل على صيغة من الرتبة $O(h^4)$ بالصيغة

$$f'(x_0) = N_2(h) + \frac{h^4}{480}f^{(5)}(x_0) + \cdots$$

حيث

$$N_2(h) = \frac{1}{3}\left[4N_1\left(\frac{h}{2}\right) - N_1(h)\right] = N_1\left(\frac{h}{2}\right) + \frac{N_1(h/2) - N_1(h)}{3}$$

وباستمرار هذه العملية يعطى لكل $j = 2, 3, \ldots$ صيغة تقريب من الرتبة $O(h^{2j})$ بالصيغة

$$N_j(h) = N_{j-1}\left(\frac{h}{2}\right) + \frac{N_{j-1}(h/2) - N_{j-1}(h)}{4^{j-1} - 1}$$

لاحظ أن مقام الكسر هو $4^{j-1} - 1$ بدلاً من $2^{j-1} - 1$؛ لأننا في هذه الحالة نتخلص من قوى h^2 بدلاً من قوى h.

وبما أن $(h/2)^2 = h^2/4$ فإن عوامل الضرب المستخدمة للتخلص من قوى h^2 هي قوى 4 بدلاً من قوى 2.

افترض أن $x_0 = 2.0, h = 0.2$ و $f(x) = xe^x$ فإن

$N_1(0.2) = N(0.2) = \frac{1}{0.4}[f(2.2) - f(1.8)] = 22.414160$

$N_1(0.1) = N(0.1) = 22.228786,$ و $N_1(0.05) = N(0.05) = 22.182564$

إن جدول الاستكمال الخارجي لهذه البيانات يظهر في جدول (6.4).

إن القيمة الصحيحة للمشتقة $f'(x) = xe^x + e^x$ عند $x_0 = 2.0$ مقربة إلى ست خانات عشرية هي 22.167168، ومن ثم فإن أعداد $N_3(0.2)$ جميعها صحيحة على الرغم من أن أفضل تقريب أصلي $N_1(0.05)$ يحوي منزلة عشرية واحدة دقيقة. ■

ولما حصلنا على كل عمود بعد العمود الأول في جدول (6.4) بطريقة إيجاد أوساط بسيطة، فإنها قد تؤدي إلى تقريبات عالية الرتبة، باستخدام الحد الأدنى من التكلفة الحسابية. وعمومًا كلما ازدادت k، ازداد خطأ التدوير في $N_1(h/2^k)$؛ لأن عدم استقرار الاشتقاق العددي مرتبط بحجم الخطوة $h/2^k$.

جدول 6.4

$N_1(0.2) = 22.414160$		
$N_1(0.1) = 22.228786$	$N_2(0.2) = N_1(0.1) + \frac{N_1(0.1) - N_1(0.2)}{3} = 22.166995$	
$N_1(0.05) = 22.182564$	$N_2(0.1) = N_1(0.05) + \frac{N_1(0.05) - N_1(0.1)}{3} = 22.167157$	$N_3(0.2) = N_2(0.1) + \frac{N_2(0.1) - N_2(0.2)}{15} = 22.167168$

لقد ناقشنا في الفصل (1.4) طريقتي الثلاث نقاط والخمس نقاط لتقريب $f'(x_0)$ عند معرفة قيم متعددة للدالّة f. وقد تم اشتقاق طريقة الثلاثة نقاط عن طريق تمييز كثيرة حدود لاجرانج للدالة f. ويمكن الحصول على طرائق الخمس نقاط بطريقة مماثلة، ولكن الاشتقاق مضنٍ. ويمكن استخدام الاستكمال الخارجي لاشتقاق هذه الصيغ بسهولة أكثر.

افترض أننا كتبنا مفكوك الدالة f في كثيرة حدود تايلور الرابعة حول x_0. إذن

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2}f''(x_0)(x - x_0)^2 + \frac{1}{6}f'''(x_0)(x - x_0)^3 + \frac{1}{24}f^{(4)}(x_0)(x - x_0)^4 + \frac{1}{120}f^{(5)}(\xi)(x - x_0)^5$$

لعدد ما ξ بين x و x_0.

إن إيجاد قيمة f عند $x_0 + h$ و $x_0 - h$ يعطي

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + f'(x_0)h + \frac{1}{2}f''(x_0)h^2 + \frac{1}{6}f'''(x_0)h^3 + \frac{1}{24}f^{(4)}(x_0)h^4 + \frac{1}{120}f^{(5)}(\xi_1)h^5 \quad (16.4)$$

و

$$f(x_0 - h) = f(x_0) - f'(x_0)h + \frac{1}{2}f''(x_0)h^2 - \frac{1}{6}f'''(x_0)h^3 + \frac{1}{24}f^{(4)}(x_0)h^4 - \frac{1}{120}f^{(5)}(\xi_2)h^5 \quad (17.4)$$

حيث $x_0 - h < \xi_2 < x_0 < \xi_1 < x_0 + h$ وبطرح الصيغة (17.4) من الصيغة (16.4) ينتج

$$f(x_0 + h) - f(x_0 - h) = 2hf'(x_0) + \frac{h^3}{3}f'''(x_0) + \frac{h^5}{120}[f^{(5)}(\xi_1) + f^{(5)}(\xi_2)] \quad (18.4)$$

إذا كانت $f^{(5)}$ متصلة على $[x_0 - h, x_0 + h]$، فإن مبرهنة القيمة الوسطية تضمن وجود عدد ξ في $(x_0 - h, x_0 + h)$ بحيث

$$f^{(5)}(\tilde{\xi}) = \tfrac{1}{2}[f^{(5)}(\xi_1) + f^{(5)}(\xi_2)]$$

ونتيجة لهذا يمكن حل الصيغة (4.18) لإيجاد $f'(x_0)$ والحصول على التقريب من الرتبة $O(h^2)$

$$f'(x_0) = \frac{1}{2h}[f(x_0 + h) - f(x_0 - h)] - \frac{h^2}{6}f'''(x_0) - \frac{h^4}{120}f^{(5)}(\tilde{\xi}) \quad (19.4)$$

وعلى الرغم من أن التقريب في الصيغة (19.4) هو التقريب نفسه المعطى في صيغة الثلاث نقاط (5.4)، إلا أن نقطة التقييم الآن تحدث في $f^{(5)}$ بدلًا من f'''.

إن الاستكمال الخارجي يستفيد من هذا بوجود $2h$ بدلًا من h في الصيغة (19.4) ليعطي الصيغة الجديدة

$$f'(x_0) = \frac{1}{4h}[f(x_0+2h) - f(x_0-2h)] - \frac{4h^2}{6}f'''(x_0) - \frac{16h^4}{120}f^{(5)}(\hat{\xi}) \qquad (20.4)$$

حيث $\hat{\xi}$ بين $x_0 - 2h$ و $x_0 + 2h$

بضرب الصيغة (19.4) في أربعة وطرح الصيغة (20.4) ينتج

$$3f'(x_0) = \frac{2}{h}[f(x_0+h) - f(x_0-h)] - \frac{1}{4h}[f(x_0+2h) - f(x_0-2h)] - \frac{h^4}{30}f^{(5)}(\tilde{\xi}) + \frac{2h^4}{15}f^{(5)}(\hat{\xi})$$

إذا كان $f^{(5)}$ متصلًا على $[x_0 - 2h, x_0 + 2h]$ فإنه يمكن استخدام طريقة بديلة لبرهنة أنه يمكن الاستعاضة عن $f^{(5)}(\hat{\xi})$ و $f^{(5)}(\tilde{\xi})$ بقيمة مشتركة $f^{(5)}(\xi)$. استخدام هذه النتيجة والقسمة على 3 تنتج صيغة الخمس نقاط

$$f'(x_0) = \frac{1}{12h}[f(x_0-2h) - 8f(x_0-h) + 8f(x_0+h) - f(x_0+2h)] + \frac{h^4}{30}f^{(5)}(\xi)$$

التي هي صيغة الخمس نقاط المعطاة في صيغة (6.4).

وبطريقة مماثلة يمكن اشتقاق الصيغ الأخرى للمشتقة الأولى والمشتقات العليا، وستُناقش بعض هذه الصيغ في التمارين.

وستستخدم طريقة الاستكمال الخارجي على مدى هذا الكتاب. وإن التطبيقات الأكثر شهرة تظهر في تقريب التكاملات في الفصل (5.4)، وتلك التي تعطي الحلول التقريبية لحل الصيغ التفاضلية في الفصل (8.4).

EXERCISE SET مجموعة التمارين 2.4

1. استخدم عملية الاستكمال الخارجي الموصوفة في المثال (1) لتحديد التقريب $N_3(h)$ للقيمة $f'(x_0)$ لكل من الدّوال الآتية وحجم الخطوة:

أ. $f(x) = \ln x, x_0 = 1.0, h = 0.4$ ب. $f(x) = x + e^x, x_0 = 0.0, h = 0.4$

جـ. $f(x) = 2^x \sin x, x_0 = 1.05, h = 0.4$ د. $f(x) = x^3 \cos x, x_0 = 2.3, h = 0.4$

2. أضف سطرًا آخر إلى جدول الاستكمال في التمرين (1) للحصول على التقريب $N_4(h)$.

3. كرّر تمرين (1) مستخدمًا حساب التدوير لأربعة أرقام.

4. كرّر تمرين (2) مستخدمًا حساب التدوير لأربعة أرقام.

5. البيانات الآتية تعطي تقريبات للتكامل $M = \int_0^{\pi} \sin x\, dx$

$$N_1(h) = 1.570796, \quad N_1\left(\frac{h}{2}\right) = 1.896119, \quad N_1\left(\frac{h}{4}\right) = 1.974232, \quad N_1\left(\frac{h}{8}\right) = 1.993570$$

على فرض أن $M = N_1(h) + K_1h^2 + K_2h^4 + K_3h^6 + K_4h^8 + O(h^{10})$ اكتب جدول استكمال لتحديد $N_4(h)$.

6. يمكن استخدام البيانات الآتية لتقريب التكامل $M = \int_0^{3\pi/2} \cos x\, dx$

$$N_1(h) = 2.356194, \qquad N_1\left(\frac{h}{2}\right) = -0.4879837$$

$$N_1\left(\frac{h}{4}\right) = -0.8815732, \qquad N_1\left(\frac{h}{8}\right) = -0.9709157$$

افترض أنه يوجد صيغة من النوع نفسه في التمرين 5، وحدِّد $N_4(h)$.

7. أثبت أن تطبيق صيغة الخمس نقط (6.4) على الدّالة $f(x) = xe^x$ على النقطة $x_0 = 2.0$ يعطي $N_2(0.2)$ في جدول (6.4) عندما $h = 0.1$، ويعطي $N_2(0.1)$ عندما $h = 0.05$.

8. من الممكن تمثيل صيغة الفرق إلى الأمام بالصيغة

$$f'(x_0) = \frac{1}{h}[f(x_0 + h) - f(x_0)] - \frac{h}{2}f''(x_0) - \frac{h^2}{6}f'''(x_0) + O(h^3)$$

استخدم الاستكمال لاشتقاق صيغة من رتبة $O(h^3)$ للقيمة $f'(x_0)$.

9. افترض أن $N(h)$ تقريب للمقدار M لكل $h > 0$، وأن

$M = N(h) + K_1h + K_2h^2 + K_3h^3 + \cdots$ لبعض الثوابت $K_1, K_2, K_3, \ldots$

استخدم قيم $N(h), N(h/3)$ و $N(h/9)$ لإيجاد تقريب من رتبة $O(h^3)$ للمقدار M.

10. افترض أن $N(h)$ تقريب للمقدار M لكل $h > 0$، وأن

$M = N(h) + K_1h^2 + K_2h^4 + K_3h^6 + \cdots$ لبعض الثوابت $K_1, K_2, K_3, \ldots$

استخدم قيم $N(h), N(h/3)$ و $N(h/9)$ لإيجاد تقريب من رتبة $O(h^6)$ للمقدار M.

11. تعلمنا في حساب التفاضل والتكامل أن $e = \lim_{h\to 0}(1 + h)^{1/h}$

أ. أوجد تقريبات e المقابلة لاستخدام $h = 0.04, 0.02$ و 0.01

ب. استخدم الاستكمال على التقريبات مفترضًا وجود ثوابت $K_1, K_2, \ldots$ و $e = (1+h)^{1/h} + K_1h + K_2h^2 + K_3h^3 + \cdots$ لإيجاد تقريب من رتبة $O(h^3)$ للقيمة e، حيث $h = 0.04$

ج. هل تعتقد أن الافتراض في (ب) صحيح؟

12. أ. أثبت أن

$$\lim_{h\to 0}\left(\frac{2+h}{2-h}\right)^{1/h} = e$$

ب. احسب تقريبات للعدد e باستخدام الصيغة

$$N(h) = \left(\frac{2+h}{2-h}\right)^{1/h}$$

والأعداد $h = 0.04, 0.02$ و 0.01

ج. افترض أن $e = N(h) + K_1h + K_2h^2 + K_3h^3 + \cdots$ استخدم الاستكمال الخارجي بدرجة دقة لغاية 16 عددًا على الأقل لتحسب تقريبًا من رتبة $O(h^3)$ للقيمة e مستخدمًا $h = 0.04$ هل تعتقد أن الافتراض صحيح؟

د. أثبت أن $N(-h) = N(h)$.

هـ. استخدم الفقرة (د) لإثبات أن $K_1 = K_3 = K_5 = \cdots = 0$ في الصيغة

$$e = N(h) + K_1h + K_2h^2 + K_3h^3 + K_4h^4 + K_5h^5 + \cdots$$



3.4 مبادئ التكامل العددي Elements of Numerical Integration

غالبًا ما نحتاج إلى إيجاد قيمة التكامل المحدود لدالّة ليس لها دالّة أصلية صريحة أو أن دالّته الصريحة يصعب الحصول عليها. إن الطريقة الرئيسة في تقريب $\int_a^b f(x)\,dx$ تسمى الطريقة العددية numerical quadrature وتستخدم الجمع

$$\sum_{i=0}^{n} a_i f(x_i)$$

لتقريب $\int_a^b f(x)\,dx$.

إن الطرائق العددية في هذا الفصل ترتكز على كثيرات الحدود للاستكمال التي بحث فيها في الفصل الثالث.

نختار أولًا مجموعة من النقاط المتميزة $\{x_0,\ldots, x_n\}$ من الفترة $[a,b]$، ثم تكامل كثيرة حدود لاجرانج للاستكمال الداخلي

$$P_n(x) = \sum_{i=0}^{n} f(x_i)L_i(x)$$

وتكامل خطأ القطع على $[a,b]$ لنحصل على

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b \sum_{i=0}^{n} f(x_i)L_i(x)\,dx + \int_a^b \prod_{i=0}^{n}(x-x_i)\frac{f^{(n+1)}(\xi(x))}{(n+1)!}\,dx$$

$$= \sum_{i=0}^{n} a_i f(x_i) + \frac{1}{(n+1)!}\int_a^b \prod_{i=0}^{n}(x-x_i)\,f^{(n+1)}(\xi(x))\,dx$$

حيث $\xi(x)$ في $[a,b]$ لكل x

$$a_i = \int_a^b L_i(x)\,dx \quad \text{لكل } i=0,1,\ldots,n$$

إن صيغة التكامل العددي quadrature تكون

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \sum_{i=0}^{n} a_i f(x_i)$$

ويكون الخطأ معطى بالصيغة

$$E(f) = \frac{1}{(n+1)!}\int_a^b \prod_{i=0}^{n}(x-x_i)\,f^{(n+1)}(\xi(x))\,dx$$

وقبل شرح الحالة العامة لصيغ التكامل العددي، دعنا نبحث في الصيغ التي نحصل عليها باستخدام كثيرات حدود لاجرانج الأولى والثانية ونقاط متساوية التباعد.

إن هذا يعطي قاعدة شبه المنحرف Trapezoidal rule وقاعدة سمبسون Simpson's rule اللتين تُقدَّمان في مقررات التفاضل والتكامل، ولاشتقاق قاعدة شبه المنحرف لتقريب $\int_a^b f(x)\,dx$ افترض $x_0=a,\ x_1=b,\ h=b-a$، واستخدم كثيرة حدود لاجرانج الخطية

$$P_1(x) = \frac{(x-x_1)}{(x_0-x_1)}f(x_0) + \frac{(x-x_0)}{(x_1-x_0)}f(x_1)$$

عندئذ

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_{x_0}^{x_1}\left[\frac{(x-x_1)}{(x_0-x_1)}f(x_0)+\frac{(x-x_0)}{(x_1-x_0)}f(x_1)\right]dx \qquad (21.4)$$
$$+\frac{1}{2}\int_{x_0}^{x_1} f''(\xi(x))(x-x_0)(x-x_1)\,dx$$

وبما أن $(x-x_0)(x-x_1)$ لا تتغير إشارتها في الفترة $[x_0, x_1]$ فإنه يمكن تطبيق مبرهنة القيمة الوسطية الموزونة للتكامل على حد التكامل لتعطي لقيمة ما ξ ضمن (x_0, x_1)

$$\int_{x_0}^{x_1} f''(\xi(x))(x-x_0)(x-x_1)\,dx = f''(\xi)\int_{x_0}^{x_1}(x-x_0)(x-x_1)\,dx$$
$$= f''(\xi)\left[\frac{x^3}{3}-\frac{(x_1+x_0)}{2}x^2+x_0x_1x\right]_{x_0}^{x_1}$$
$$= -\frac{h^3}{6}f''(\xi)$$

ومن ثم فإن الصيغة (21.4) تعطي

$$\int_a^b f(x)\,dx = \left[\frac{(x-x_1)^2}{2(x_0-x_1)}f(x_0)+\frac{(x-x_0)^2}{2(x_1-x_0)}f(x_1)\right]_{x_0}^{x_1}-\frac{h^3}{12}f''(\xi)$$
$$= \frac{(x_1-x_0)}{2}[f(x_0)+f(x_1)]-\frac{h^3}{12}f''(\xi).$$

وبما أن $h = x_1 - x_0$ فلدينا القاعدة الآتية.

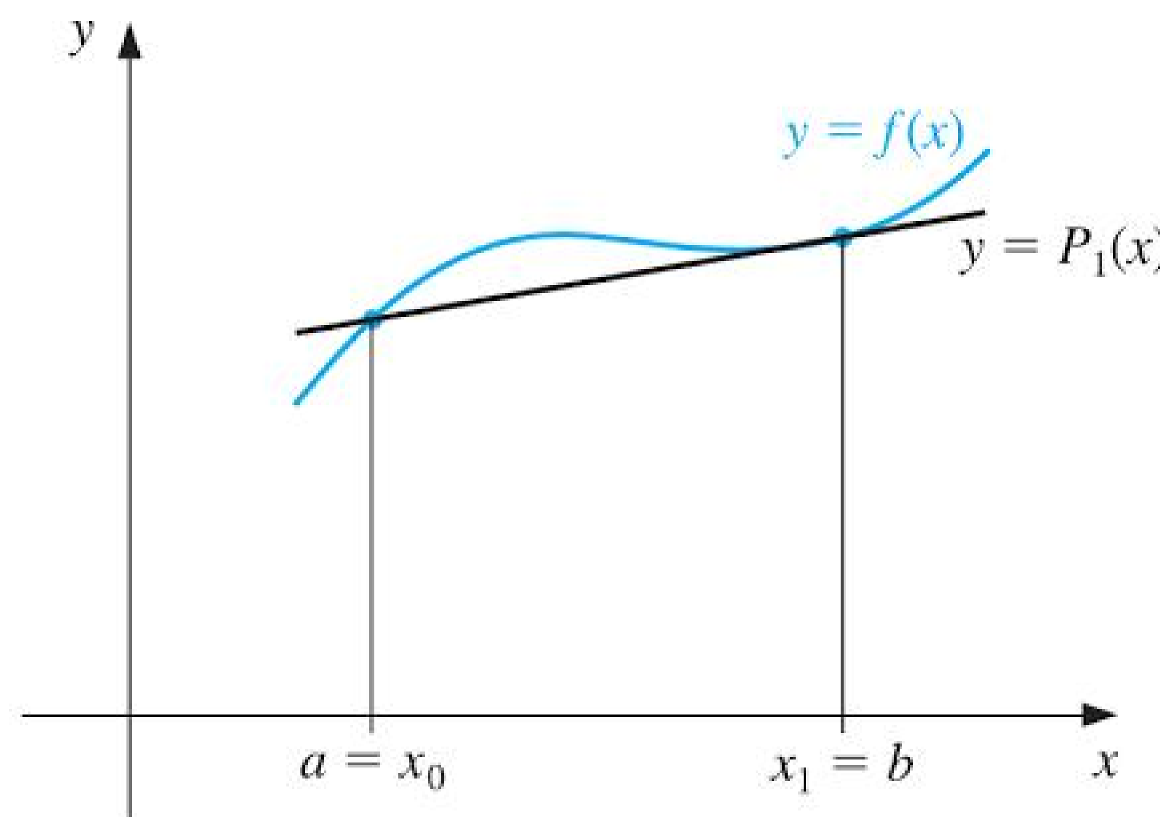
عند استخدام مصطلح شبه المنحرف، فإننا نقصد أي شكل رباعي فيه ضلعان متوازيان على الأقل. إن المصطلح الأوروبي لهذا شكل هو "trapezium". ولزيادة الأمر تعقيدًا، فإن الكلمة الأوروبية "trapezoid" تشير إلى أي شكل رباعي ليس فيه أي ضلعين متساويين، والكلمة الأمريكية المقابلة لهذا شكل هي "trapezium".

قاعدة شبه المنحرف **Trapezoidal Rule**

$$\int_a^b f(x)\,dx = \frac{h}{2}[f(x_0)+f(x_1)]-\frac{h^3}{12}f''(\xi)$$

وتسمى هذه بقاعدة شبه المنحرف؛ لأن f عندما تكون دالة قيمتها موجبة فإن $\int_a^b f(x)\,dx$ يكون مقرّبًا بمساحة شبه المنحرف. (كما يظهر في شكل 3.4).

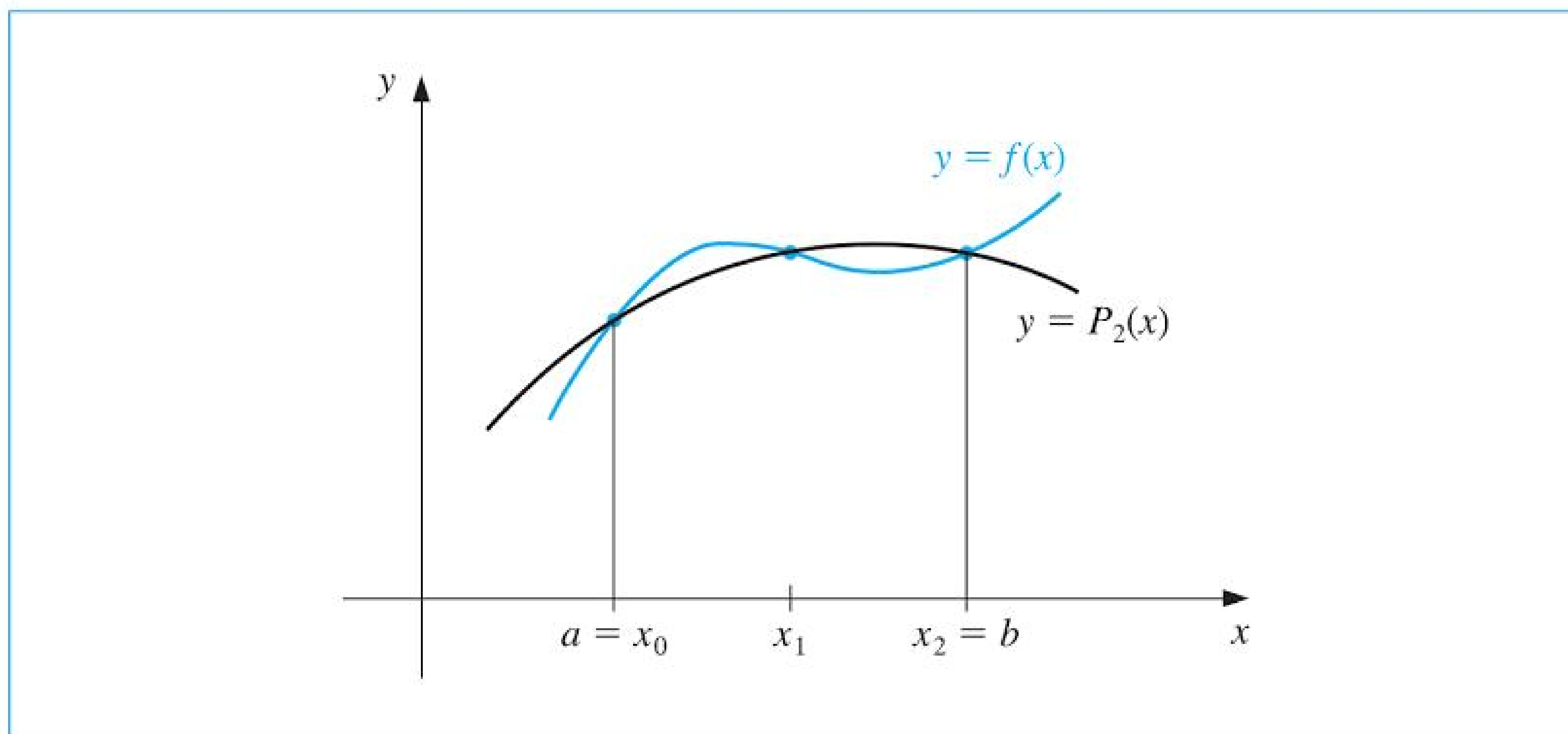
شكل 3.4



وبما أن حد الخطأ في قاعدة شبه المنحرف تحتوي على f''، فإن القاعدة تعطي النتائج الدقيقة عندما تطبق على أي دالّة مشتقتها الثانية مطابقة للصفر، أي لأي كثيرة حدود من الرتبة 1 أو أقل.

إن قاعدة سمبسون تنتج من تكامل كثيرة حدود لاجرانج من الرتبة الثانية على الفترة $[a, b]$ باستخدام $x_0 = a, x_2 = b$ و $x_1 = a + h$ حيث $h = (b - a)/2$ (انظر شكل 4.4)

شكل 4.4



ولذلك فإن

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_{x_0}^{x_2} \left[\frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} f(x_0) + \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)} f(x_1) + \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)} f(x_2) \right] dx + \int_{x_0}^{x_2} \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)}{6} f^{(3)}(\xi(x))\,dx$$

وعلى كل حال فإن اشتقاق قاعدة سمبسون بهذه الطريقة يعطي فقط خطأً من رتبة $O(h^4)$ محتويًا $f^{(3)}$.

وبمحاولة حل المسألة بطريقة أخرى، يمكننا اشتقاق حد ذي رتبة أعلى تحتوي $f^{(4)}$. ولشرح هذه الصيغة البديلة؛ نفترض f مفكوكًا بكثيرة حدود تايلور من الرتبة الثالثة حول x_1. عندئذ كل x في $[x_0, x_2]$ يوجد العدد $\xi(x)$ في (x_0, x_2) بحيث

$$f(x) = f(x_1) + f'(x_1)(x-x_1) + \frac{f''(x_1)}{2}(x-x_1)^2 + \frac{f'''(x_1)}{6}(x-x_1)^3 + \frac{f^{(4)}(\xi(x))}{24}(x-x_1)^4$$

و

$$\int_{x_0}^{x_2} f(x)\,dx = \left[f(x_1)(x-x_0) + \frac{f'(x_1)}{2}(x-x_1)^2 + \frac{f''(x_1)}{6}(x-x_1)^3 + \frac{f'''(x_1)}{24}(x-x_1)^4 \right]_{x_0}^{x_2} + \frac{1}{24}\int_{x_0}^{x_2} f^{(4)}(\xi(x))(x-x_1)^4\,dx \qquad (22.4)$$

وبما أن $(x-x_1)^4$ لا يكون سالبًا أبدًا في $[x_0, x_2]$، فإن مبرهنة القيمة الوسطية الموزونة تعطي

$$\frac{1}{24}\int_{x_0}^{x_2} f^{(4)}(\xi(x))(x-x_1)^4\,dx = \frac{f^{(4)}(\xi_1)}{24}\int_{x_0}^{x_2}(x-x_1)^4\,dx = \frac{f^{(4)}(\xi_1)}{120}(x-x_1)^5\Big]_{x_0}^{x_2}$$

لعددٍ ما ξ_1 في (x_0, x_2)

على كل حال، $h = x_2 - x_1 = x_1 - x_0$ ولذلك فإن

$$(x_2-x_1)^2-(x_0-x_1)^2 = (x_2-x_1)^4-(x_0-x_1)^4 = 0$$

حيث

$$(x_2-x_1)^3-(x_0-x_1)^3 = 2h^3 \quad \text{و} \quad (x_2-x_1)^5-(x_0-x_1)^5 = 2h^5$$

وعليه يمكن كتابة الصيغة (22.4) على الصيغة

$$\int_{x_0}^{x_2} f(x)\,dx = 2hf(x_1) + \frac{h^3}{3}f''(x_1) + \frac{f^{(4)}(\xi_1)}{60}h^5$$

وإذا عوّضنا عن $f''(x_1)$ بالقيمة التقريبية المعطاة في الصيغة (9.4) في الفصل (1.4) نجد أن

$$\int_{x_0}^{x_2} f(x)\,dx = 2hf(x_1) + \frac{h^3}{3}\left\{\frac{1}{h^2}[f(x_0)-2f(x_1)+f(x_2)] - \frac{h^2}{12}f^{(4)}(\xi_2)\right\} + \frac{f^{(4)}(\xi_1)}{60}h^5$$

$$= \frac{h}{3}[f(x_0)+4f(x_1)+f(x_2)] - \frac{h^5}{12}\left[\frac{1}{3}f^{(4)}(\xi_2) - \frac{1}{5}f^{(4)}(\xi_1)\right]$$

من الممكن استخدام طرائق بديلة (انظر التمرين 24) لبرهنة أن القيمتين ξ_1 و ξ_2 في هذا التعبير يمكن الاستعاضة عنهما بقيمة مشتركة ξ في (x_0, x_2). إن هذا يعطي قاعدة سمبسون.

ثوماس سمبسون
Thomas Simpson
1710–1761 عالم رياضيات قد تعلّمها بنفسه، وكان يعمل نسّاجًا لكسب رزقه. كان اهتمامه الأساس بمبرهنة الاحتمال، إلا أنه في عام 1750 نشر كتابًا في التفاضل والتكامل في مجلدين اسمه
The Doctrine and Application of Fluxions.

قاعدة سمبسون Simpson's Rule

$$\int_{x_0}^{x_2} f(x)\,dx = \frac{h}{3}[f(x_0)+4f(x_1)+f(x_2)] - \frac{h^5}{90}f^{(4)}(\xi)$$

وبما أن حد الخطأ فيه المشتقة الرابعة للدالّة f، فإن قاعدة سمبسون تعطي نتائج صحيحة لكل كثيرة حدود من الرتبة الثالثة أو أقل.

مثال 1 قاعدة شبه المنحرف للدالّة f على الفترة $[0, 2]$ هي

$$\int_0^2 f(x)\,dx \approx f(0) + f(2)$$

وقاعدة سمبسون للدالّة f على الفترة $[0, 2]$ هي

$$\int_0^2 f(x)\,dx \approx \frac{1}{3}[f(0)+4f(1)+f(2)]$$

يظهر ملخص النتائج مقربًا إلى ثلاث خانات لبعض الدّوال الابتدائية في جدول (7.4).

لاحظ أن قاعدة سمبسون هي الأفضل في كل حالة. ■

جدول 7.4

$f(x)$	x^2	x^4	$1/(x+1)$	$\sqrt{1+x^2}$	$\sin x$	e^x
القيمة الصحيحة	2.667	6.400	1.099	2.958	1.416	6.389
شبه المنحرف	4.000	16.000	1.333	3.326	0.909	8.389
سمبسون	2.667	6.667	1.111	2.964	1.425	6.421

إن الاشـــتقاق العادي لصيغ الخطأ يبنى على كثيرات الحدود التي تنتج نتائج صحيحة لتطبيق هذه الصيغ عليها. ويستخدم التعريف الآتي لتسهيل شرح هذا الاشتقاق.

تعريف 1.4

تعرف درجة الدقة لصيغة عددية على أنها أكبر عدد صحيح موجب n بحيث تكون جميع قيم الصيغة غير مقرّبة عند x^k لكل n ، $k = 0, 1, 2\ldots$. ■

إن التحسـن فـي الدقـة لقاعـدة سمبسون على قاعدة شبه المنحرف يفسَّـر عفويًّا بحقيقـة أن قاعدة سمبسـون تحتوي على التقييم عند نقطة متوسـطة تؤدي إلـى توازن أفضل للتقريب.

ويبين تعريف (1.4) أن قاعدة شـــبه المنحرف وقاعدة سمبســـون لهما درجات دقة واحدة وثلاثة على التوالي.

إن كلًّا من التكامل والجمع عملية خطية، أي أن

$$\int_a^b (\alpha f(x) + \beta g(x))\, dx = \alpha \int_a^b f(x)\, dx + \beta \int_a^b g(x)\, dx$$

و

$$\sum_{i=0}^{n} (\alpha f(x_i) + \beta g(x_i)) = \alpha \sum_{i=0}^{n} f(x_i) + \beta \sum_{i=0}^{n} g(x_i)$$

لكل زوج من الدّوال القابلة للتكامل f و g وأي زوج من الثوابت α, β.

إن المصطلـح «مفتوحـة ومغلقـة لطرائـق إيجـاد التكامل» تعني أن الطرائـق المفتوحة تسـتخدم لتقييم النقاط في الفترة المفتوحة (a, b) عند إيجـاد تقريب للتكامل $\int_a^b f(x)dx$، أمـا الطرائق المغلقة فهي تستخدم لتقييـم نقطتي النهاية فـي الفترة المغلقة $[a, b]$.

وهذا يتضمن (انظر التمرين 25) أن رتبة الدقة لأي صيغة تكامل هي n إذا وفقط إذا كان الخطأ $E(P(x)) = 0$ لكثيرات الحدود $P(x)$ جميعها من الرتبة n ، $k = 0, 1, 2\ldots$، ولكن $E(P(x)) \neq 0$ لكثيرات حدود ما من الرتبة $n+1$.

إن قاعدة شبه المنحرف وقاعدة سمبسون هي أمثلة لعائلة من الطرائق تعرف بصيغ نيوتن – كوتس Newton – Cotes formulas.

هناك نوعان من صيغ نيوتن – كوتس: مفتوحة ومغلقة.

إن صيغـة نيوتـن – كوتـس المغلقـة ذات $(n+1)$ نقطـة تسـتخدم $x_i = x_0 + ih$ لـكل $i = 0, 1, \ldots, n$. (انظر شكل 5.4).

تسمى هذه الصيغة مغلقة؛ لأن نقطتي الحدود للفترة المغلقة $[a, b]$ متضمنة في نقاط التقييم.

تأخذ هذه الصيغة الصورة

$$\int_a^b f(x)\, dx \approx \sum_{i=0}^{n} a_i f(x_i)$$

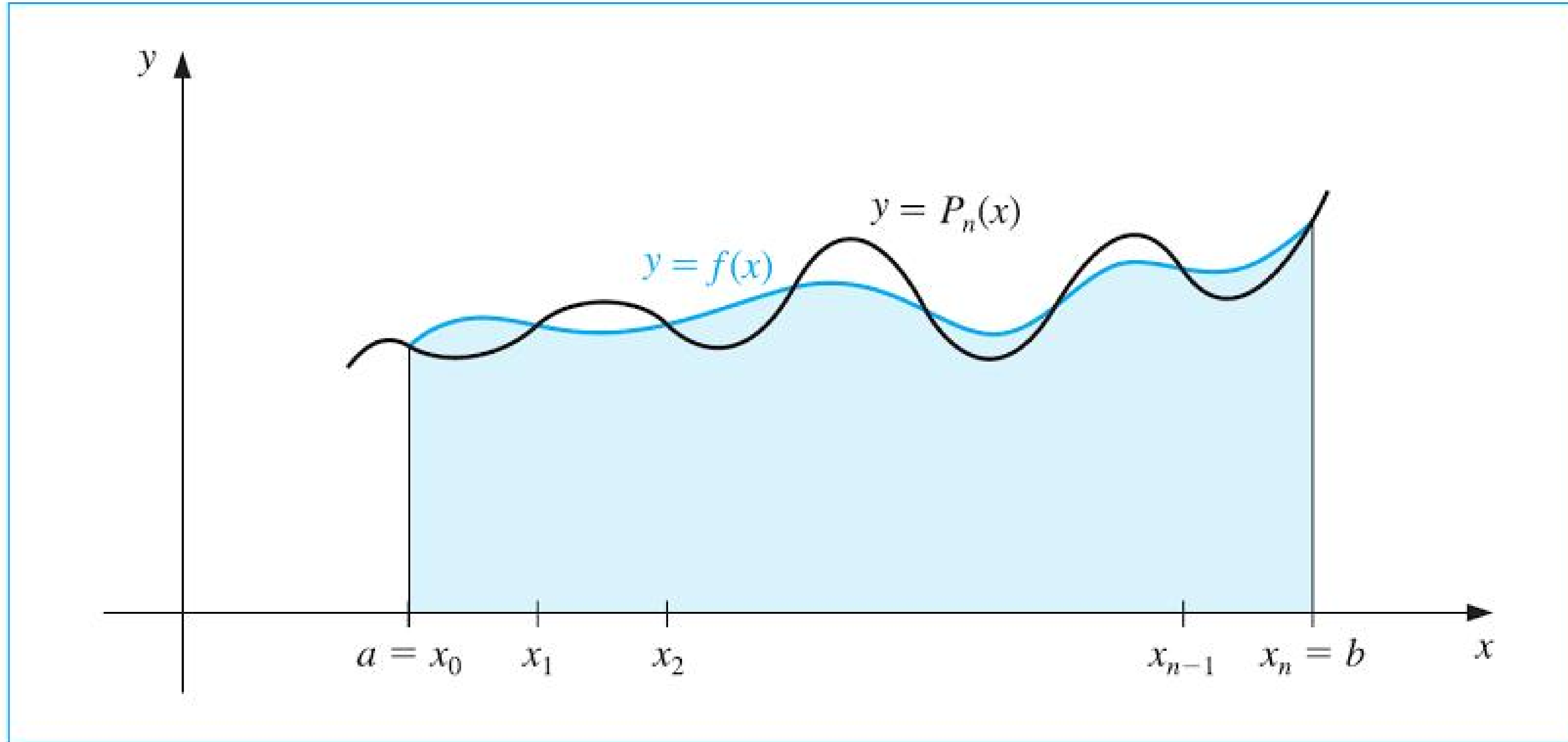
حيث

$$a_i = \int_{x_0}^{x_n} L_i(x)\, dx = \int_{x_0}^{x_n} \prod_{\substack{j=0 \\ j\neq i}}^{n} \frac{(x - x_j)}{(x_i - x_j)}\, dx$$

وتصف المبرهنة الآتية تفاصيل تحليل الخطأ المرتبط بصيغ نيوتن – كوتس.

انظر برهان هذه المبرهنة [IK, p. 313].

شكل 5.4



مبرهنة 2.4 افترض أن $\sum_{i=0}^{n} a_i f(x_i)$ هي صيغة نيوتن – كوتس ذات $(n + 1)$ نقطة حيث $x_0 = a, x_n = b$ و $h = (b - a)/n$. عندئذ، يوجد عدد $\xi \in (a, b)$ يحقق

$$\int_a^b f(x)\,dx = \sum_{i=0}^{n} a_i f(x_i) + \frac{h^{n+3} f^{(n+2)}(\xi)}{(n+2)!} \int_0^n t^2(t-1)\cdots(t-n)\,dt$$

إذا كان n عددًا زوجيًّا و $f \in C^{n+2}[a, b]$. أما إذا كان n عددًا فرديًّا و $f \in C^{n+1}[a, b]$ فإن

$$\int_a^b f(x)\,dx = \sum_{i=0}^{n} a_i f(x_i) + \frac{h^{n+2} f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \int_0^n t(t-1)\cdots(t-n)\,dt$$

■

لاحظ أنه عندما يكون n عددًا صحيحًا زوجيًّا، فإن رتبة الدقة $n + 1$ على الرغم من أن كثيرة الحدود للاستيفاء الداخلي interpolation هي من رتبة n على الأكثر.

عندما يكون n عددًا فرديًّا فإن رتبة الدقة هي فقط n.

بعض صيغ نيوتن – كوتس المغلقة الشائعة **closed Newton–Cotes formulas**، وحدود الخطأ لها هي كما يلي:

$n = 1$: قاعدة شبه المنحرف Trapezoidal rule

$$\int_{x_0}^{x_1} f(x)\,dx = \frac{h}{2}[f(x_0) + f(x_1)] - \frac{h^3}{12} f''(\xi) \qquad (23.4)$$

حيث $x_0 < \xi < x_1$.

$n = 2$: قاعدة سمبسون Simpson's rule

$$\int_{x_0}^{x_2} f(x)\,dx = \frac{h}{3}[f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2)] - \frac{h^5}{90} f^{(4)}(\xi) \qquad (24.4)$$

حيث $x_0 < \xi < x_2$.

$n = 3$: قاعدة الثلاثة أثمان لسمبسون Simpson's Three-Eighths rule

$$\int_{x_0}^{x_3} f(x)\,dx = \frac{3h}{8}[f(x_0) + 3f(x_1) + 3f(x_2) + f(x_3)] - \frac{3h^5}{80} f^{(4)}(\xi) \qquad (25.4)$$

حيث $x_0 < \xi < x_3$.

$n = 4$:

$$\int_{x_0}^{x_4} f(x)\,dx = \frac{2h}{45}[7f(x_0) + 32f(x_1) + 12f(x_2) + 32f(x_3) + 7f(x_4)] - \frac{8h^7}{945} f^{(6)}(\xi) \qquad (26.4)$$

حيث $x_0 < \xi < x_4$.

إن صيغ نيوتن – كوتس المفتوحة *open Newton–Cotes formulas* تستخدم لتقييم النقاط $x_i = x_0 + ih$ لكل $i = 0, 1, \ldots, n$ حيث $h = (b-a)/(n+2)$ و $x_0 = a + h$.

إن هذا يعطي $x_n = b - h$، ولذلك نعدد نقاط النهاية بوضع $x_{-1} = a$ و $x_{n+1} = b$ (كما يظهر في شكل 6.4).

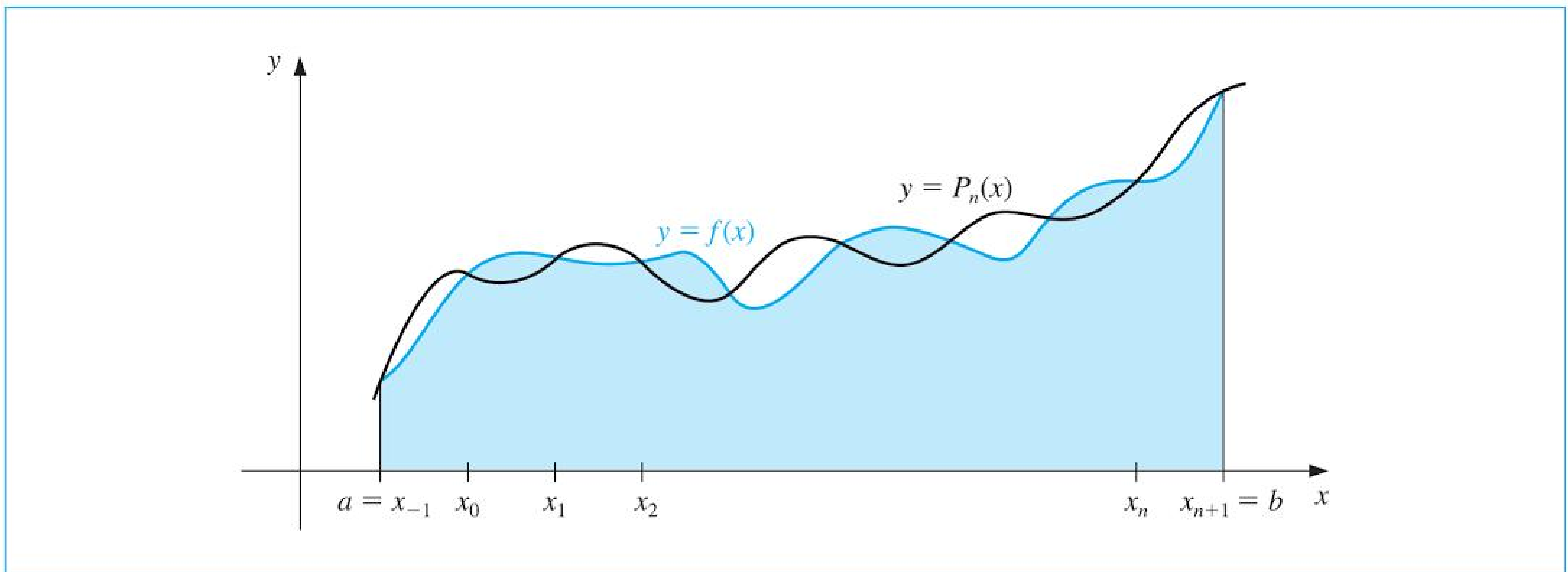
إن الصيغ المفتوحة تحوي النقاط المستخدمة جميعها في التقريب في الفترة المفتوحة (a, b).

تصبح الصيغ

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_{x_{-1}}^{x_{n+1}} f(x)\,dx \approx \sum_{i=0}^{n} a_i f(x_i)$$

حيث $a_i = \int_a^b L_i(x)\,dx$ أيضًا.

شكل 6.4



المبرهنة الآتية مماثلة للمبرهنة (2.4)، وبرهانها موجود في [IK, p. 314].

مبرهنة 3.4 افترض أن $\sum_{i=0}^{n} a_i f(x_i)$ هي صيغة نيوتن – كوتس المفتوحة ذات $(n+1)$ نقطة حيث $x_{-1} = a, x_{n+1} = b$ و $h = (b-a)/(n+2)$. عندئذ، يوجد عدد $\xi \in (a, b)$ بحيث

$$\int_a^b f(x)\,dx = \sum_{i=0}^{n} a_i f(x_i) + \frac{h^{n+3} f^{(n+2)}(\xi)}{(n+2)!} \int_{-1}^{n+1} t^2(t-1)\cdots(t-n)\,dt$$

إذا كان n زوجيًا و $f \in C^{n+2}[a, b]$، وأما إذا كان n فرديًا و $f \in C^{n+1}[a, b]$.

$$\int_a^b f(x)\,dx = \sum_{i=0}^{n} a_i f(x_i) + \frac{h^{n+2} f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \int_{-1}^{n+1} t(t-1)\cdots(t-n)\,dt$$ ■

بعض صيغ نيوتن – كوتس المفتوحة مع حد الخطأ هي

$n = 0$: قاعدة النقطة الوسيطية Midpoint rule

$$\int_{x_{-1}}^{x_1} f(x)\,dx = 2hf(x_0) + \frac{h^3}{3} f''(\xi) \quad (27.4)$$ حيث $x_{-1} < \xi < x_1$

$n = 1$:

$$\int_{x_{-1}}^{x_2} f(x)\,dx = \frac{3h}{2}[f(x_0) + f(x_1)] + \frac{3h^3}{4} f''(\xi) \quad (28.4)$$ حيث $x_{-1} < \xi < x_2$

$n = 2$:

$$\int_{x_{-1}}^{x_3} f(x)\,dx = \frac{4h}{3}[2f(x_0) - f(x_1) + 2f(x_2)] + \frac{14h^5}{45} f^{(4)}(\xi) \quad (29.4)$$

حيث $x_{-1} < \xi < x_3$.

$n = 3$:

$$\int_{x_{-1}}^{x_4} f(x)\,dx = \frac{5h}{24}[11f(x_0) + f(x_1) + f(x_2) + 11f(x_3)] + \frac{95}{144} h^5 f^{(4)}(\xi) \quad (30.4)$$

حيث $x_{-1} < \xi < x_4$.

مثال 2 إن استخدام صيغ نيوتن – كوتس المفتوحة والمغلقة المدرجة في الصيغ (23.4)–(26.4) و(27.4)–(30.4) لإيجاد تقريب للتكامل $\int_0^{\pi/4} \sin x\,dx = 1 - \sqrt{2}/2 \approx 0.29289322$ يعطي النتائج المدوّنة في جدول (8.4). ■

جدول 8.4

n	0	1	2	3	4
المعادلات المغلقة		0.27768018	0.29293264	0.29291070	0.29289318
الخطأ		0.01521303	0.00003942	0.00001748	0.00000004
المعادلات المفتوحة	0.30055887	0.29798754	0.29285866	0.29286923	
الخطأ	0.00766565	0.00509432	0.00003456	0.00002399	

EXERCISE SET 3.4 مجموعة التمارين

1. أوجد تقريبًا للتكاملات الآتية باستخدام قاعدة شبه المنحرف:

أ. $\int_{0.5}^{1} x^4\,dx$ ب. $\int_{0}^{0.5} \frac{2}{x-4}\,dx$ جـ. $\int_{1}^{1.5} x^2 \ln x\,dx$ د. $\int_{0}^{1} x^2 e^{-x}\,dx$

هـ. $\int_{1}^{1.6} \frac{2x}{x^2-4}\,dx$ و. $\int_{0}^{0.35} \frac{2}{x^2-4}\,dx$ ز. $\int_{0}^{\pi/4} x \sin x\,dx$ حـ. $\int_{0}^{\pi/4} e^{3x} \sin 2x\,dx$

2. أوجد تقريبًا للتكاملات الآتية باستخدام قاعدة شبه المنحرف

أ. $\int_{-0.25}^{0.25} (\cos x)^2\,dx$ ب. $\int_{-0.5}^{0} x \ln(x+1)\,dx$

جـ. $\int_{0.75}^{1.3} \left((\sin x)^2 - 2x \sin x + 1\right)\,dx$ د. $\int_{e}^{e+1} \frac{1}{x \ln x}\,dx$

3. أوجد حدًّا للخطأ في التمرين (1) باستخدام صيغة الخطأ، وقارن ذلك بالخطأ الفعلي.
4. أوجد حدًّا للخطأ في التمرين (2) باستخدام صيغة الخطأ، وقارن ذلك بالخطأ الفعلي.
5. أعد حل التمرين (1) باستخدام قاعدة سمبسون.
6. أعد حل التمرين (2) باستخدام قاعدة سمبسون.
7. أعد حل التمرين (3) باستخدام قاعدة سمبسون ونتائج التمرين (5).
8. أعد حل التمرين (4) باستخدام قاعدة سمبسون ونتائج التمرين (6).
9. أعد حل التمرين (1) باستخدام قاعدة النقطة الوسيطية.
10. أعد حل التمرين (2) باستخدام قاعدة النقطة الوسيطية.
11. أعد حل التمرين (3) باستخدام قاعدة النقطة الوسيطية ونتائج التمرين (9).
12. أعد حل التمرين (4) باستخدام قاعدة النقطة الوسيطية ونتائج التمرين (10).
13. إن تطبيق قاعدة شبه المنحرف لإيجاد $\int_0^2 f(x)\,dx$ يعطي القيمة 4، أما قاعدة سمبسون فتعطي القيمة 2، فما قيمة $f(1)$؟
14. إن تطبيق قاعدة شبه المنحرف لإيجاد $\int_0^2 f(x)\,dx$ يعطي القيمة 5، وقاعدة النقطة الوسيطية تعطي القيمة 4، فما القيمة التي تعطيها قاعدة سمبسون؟
15. أوجد رتبة الدقة التي تعطيها قاعدة التكامل

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx = f\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right) + f\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$$

16. افترض أن $h = (b-a)/3, x_0 = a, x_1 = a + h$ و $x_2 = b$ أوجد رتبة الدقة التي تعطيها قاعدة التكامل

$$\int_{a}^{b} f(x)\,dx = \frac{9}{4}hf(x_1) + \frac{3}{4}hf(x_2)$$

17. إن قاعدة التكامل $\int_{-1}^{1} f(x)\,dx = c_0 f(-1) + c_1 f(0) + c_2 f(1)$ تعطي نتائج صحيحة لكثيرات جميعها الحدود من الرتبة الثانية أو أقل. حدّد قيم c_2, c_1, c_0.
18. إن قاعدة التكامل $\int_0^2 f(x)\,dx = c_0 f(0) + c_1 f(1) + c_2 f(2)$ تعطي نتائج صحيحة لكثيرات الحدود جميعها من الرتبة الثانية أو أقل.حدّد قيم c_2, c_1, c_0.
19. أوجد الثوابت c_0, c_1, x_1 بحيث تعطي صيغة التكامل $\int_0^1 f(x)\,dx = c_0 f(0) + c_1 f(x_1)$ أعلى رتبة ممكنة من الدقة.
20. أوجد الثوابت x_0, x_1, c_1 بحيث تعطي صيغة التكامل $\int_0^1 f(x)\,dx = \frac{1}{2} f(x_0) + c_1 f(x_1)$ أعلى رتبة ممكنة من الدقة.

21. أوجد قيمًا تقريبية للتكاملات الآتية باستخدام الصيغ (23.4) حتى (30.4).
هل درجات الدقة في التقريبات متلائمة مع صيغ الخطأ؟
أي الفقرتين (د) و (هـ) يعطي التقريب الأفضل؟

أ. $\int_0^{0.1} \sqrt{1+x}\, dx$ ب. $\int_0^{\pi/2} (\sin x)^2\, dx$ جـ. $\int_{1.1}^{1.5} e^x\, dx$

د. $\int_1^{10} \frac{1}{x}\, dx$ هـ. $\int_1^{5.5} \frac{1}{x}\, dx + \int_{5.5}^{10} \frac{1}{x}\, dx$ و. $\int_0^1 x^{1/3}\, dx$

22. لديك قيم الدّالة f على القيم الآتية:

x	1.8	2.0	2.2	2.4	2.6
$f(x)$	3.12014	4.42569	6.04241	8.03014	10.46675

أوجد التقريب للتكامل $\int_{1.8}^{2.6} f(x)\, dx$ باستخدام جميع صيغ التكامل المناسبة التي درست في هذا الفصل.

23. افترض أن في بيانات التمرين (22) أخطاء تدوير كما في جدول الآتي

x	1.8	2.0	2.2	2.4	2.6
الخطأ في $f(x)$	2×10^{-6}	-2×10^{-6}	-0.9×10^{-6}	-0.9×10^{-6}	2×10^{-6}

احسب الأخطاء الناتجة من التدوير عند حل التمرين (22).

24. اشتق قاعدة سمبسون مع حد الخطأ باستخدام

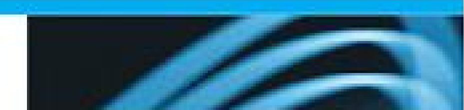
$$\int_{x_0}^{x_2} f(x)\, dx = a_0 f(x_0) + a_1 f(x_1) + a_2 f(x_2) + k f^{(4)}(\xi)$$

أوجد a_0, a_1 ، a_2 من حقيقة أن قاعدة سمبسون تكون صحيحة للدالّة $f(x) = x^n$ عندما $n = 1, 2, 3$.
ثم أوجد k بتطبيق صيغة التكامل على $f(x) = x^4$.

25. برهن العبارة الواردة بعد تعريف (1.4)، أي برهن أن صيغة التكامل لها رتبة دقة إذا وفقط إذا كان حد الخطأ $E(P(x)) = 0$ كثيرات الحدود $P(x)$ جميعها من الرتبة n $k = 0, 1, \ldots, n$ ولكن $E(P(x)) \neq 0$ لبعض كثيرات الحدود $P(x)$ من الرتبة $n+1$.

26. اشتق قاعدة الثلاثة أثمان لسمبسون، الصيغة (25.4)، مع حد الخطأ باستخدام المبرهنة (2.4).

27. اشتق الصيغة (28.4) مع حد الخطأ باستخدام المبرهنة (3.4).



4.4 التكامل العددي المركب Composite Numerical Integration

غالبًا ما يكون التقريب المتقطع ذا فاعلية. تذكر أن هذا قد استُخدِم في استيفاء بيزييه Bézier.

إن صيغ نيوتن–كوتس عمومًا تصلح للاستخدام على فترات تكامل كبيرة. هناك حاجة إلى صيغ ذات رتبة عالية، لكن يصعب في هذه الصيغ إيجاد قيمها. بالإضافة إلى ذلك فإن صيغ نيوتن– كوتس مبنية على كثيرات حدود استكمالية مستخدمة نقاطا متساوية الأبعاد؛ وذلك بسبب طبيعة ذبذبة كثيرات الحدود عالية الدرجة. وسنناقش في هذا الفصل المنحنى المتقطع (*piecewise*) للتكامل العددي باستخدام صيغ نيوتن–كوتس ذات الرتب المتدنية.

إن هذه هي الطرائق الأكثر استخدامًا.

افترض إيجاد تقريب للتكامل $\int_0^4 e^x\, dx$. إن قاعدة سمبسون على فرض $h = 2$ تعطي

$$\int_0^4 e^x\,dx \approx \frac{2}{3}(e^0 + 4e^2 + e^4) = 56.76958$$

وبما أن الجواب الدقيق في هذه الحالة هو $e^4 - e^0 = 53.59815$ ، فإن الخطأ يساوي -3.17143 وهو أكثر كثيرًا مما نقبله عادة.

ولتطبيق تقنية متقطعة لهذه المسألة؛ قسّم $[0, 4]$ بين $[0, 2]$ و $[2, 4]$ واستخدم قاعدة سمبسون مرتين باستخدام $h = 1$.

إن هذا يعطيك

$$\int_0^4 e^x\,dx = \int_0^2 e^x\,dx + \int_2^4 e^x\,dx \approx \frac{1}{3}\left(e^0 + 4e + e^2\right) + \frac{1}{3}\left(e^2 + 4e^3 + e^4\right)$$
$$= \frac{1}{3}\left(e^0 + 4e + 2e^2 + 4e^3 + e^4\right)$$
$$= 53.86385$$

لقد تقلّص الخطأ إلى -0.26570 وهذه النتائج تدفعنا إلى تقسيم الفترتين $[0, 2]$ و $[2, 4]$ واستخدام قاعدة سمبسون بالقيمة $h = \frac{1}{2}$ فنحصل على

$$\int_0^4 e^x\,dx = \int_0^1 e^x\,dx + \int_1^2 e^x\,dx + \int_2^3 e^x\,dx + \int_3^4 e^x\,dx$$
$$\approx \frac{1}{6}\left(e_0 + 4e^{1/2} + e\right) + \frac{1}{6}\left(e + 4e^{3/2} + e^2\right)$$
$$+ \frac{1}{6}\left(e^2 + 4e^{5/2} + e^3\right) + \frac{1}{6}\left(e^3 + 4e^{7/2} + e^4\right)$$
$$= \frac{1}{6}\left(e^0 + 4e^{1/2} + 2e + 4e^{3/2} + 2e^2 + 4e^{5/2} + 2e^3 + 4e^{7/2} + e^4\right)$$
$$= 53.61622$$

ويقدر الخطأ لهذا التقريب بالقيمة -0.01807.

ولتعميم هذه الطريقة؛ سنختار عددًا صحيحًا زوجيًا. قسّم الفترة $[a, b]$ إلى n من الفترات الجزئية، وطبّق قاعدة سمبسون على كل فترتين جزئيتين متتاليتين. (انظر شكل 7.4)

خذ $h = (b - a)/n$ و $x_j = a + jh$ لكل $j = 0, 1, \ldots, n$ فنحصل على

$$\int_a^b f(x)\,dx = \sum_{j=1}^{n/2} \int_{x_{2j-2}}^{x_{2j}} f(x)\,dx$$
$$= \sum_{j=1}^{n/2} \left\{ \frac{h}{3}[f(x_{2j-2}) + 4f(x_{2j-1}) + f(x_{2j})] - \frac{h^5}{90} f^{(4)}(\xi_j) \right\}$$

لبعض ξ_j حيث $x_{2j-2} < \xi_j < x_{2j}$ شريطة أن $f \in C^4[a, b]$.

باستخدام حقيقة أنه لكل $j = 1, 2, \ldots, (n/2) - 1$. يكون $f(x_{2j})$ ظاهرًا في الحد المقابل للفترة $[x_{2j-2}, x_{2j}]$ وكذلك في الحدّ المقابل للفترة $[x_{2j}, x_{2j+2}]$،



وهكذا فإن

$$E(f) = -\frac{h^5}{90}\sum_{j=1}^{n/2} f^{(4)}(\xi_j) = -\frac{h^5}{180} n f^{(4)}(\mu)$$

أو بما أن $h = (b-a)/n$ فإن

$$E(f) = -\frac{(b-a)}{180} h^4 f^{(4)}(\mu)$$

إن هذه المشاهدات تؤدي إلى النتيجة الآتية:

مبرهنة 4.4

ليكن $f \in C^4[a, b]$، n عدد زوجي، $h = (b-a)/n$ و $x_j = a + jh$ لكل $j = 0, 1, \ldots, n$ فإنه يوجد $\mu \in (a, b)$ بحيث إن قاعدة سمبسون المركبة يمكن كتابتها مع حد الخطأ فيها إلى n من الفترات الجزئية على الصيغة الآتية:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \frac{h}{3}\left[f(a) + 2\sum_{j=1}^{(n/2)-1} f(x_{2j}) + 4\sum_{j=1}^{n/2} f(x_{2j-1}) + f(b)\right] - \frac{b-a}{180} h^4 f^{(4)}(\mu)$$

■

تستخدم الخوارزمية (1.4) قاعدة سمبسون المركبة على n من الفترات الجزئية، وإن هذه الخوارزمية هي الأكثر استخدامًا؛ لكونها خوارزمية عرض عام للتكامل.



قاعدة سمبسون المركبة Compsite Simpson's Rule

لتقريب التكامل $I = \int_a^b f(x)\,dx$

المدخلات: نقطتا النهاية b، a، n عدد صحيح موجب زوجي.

المخرجات: تقريب XI إلى I.

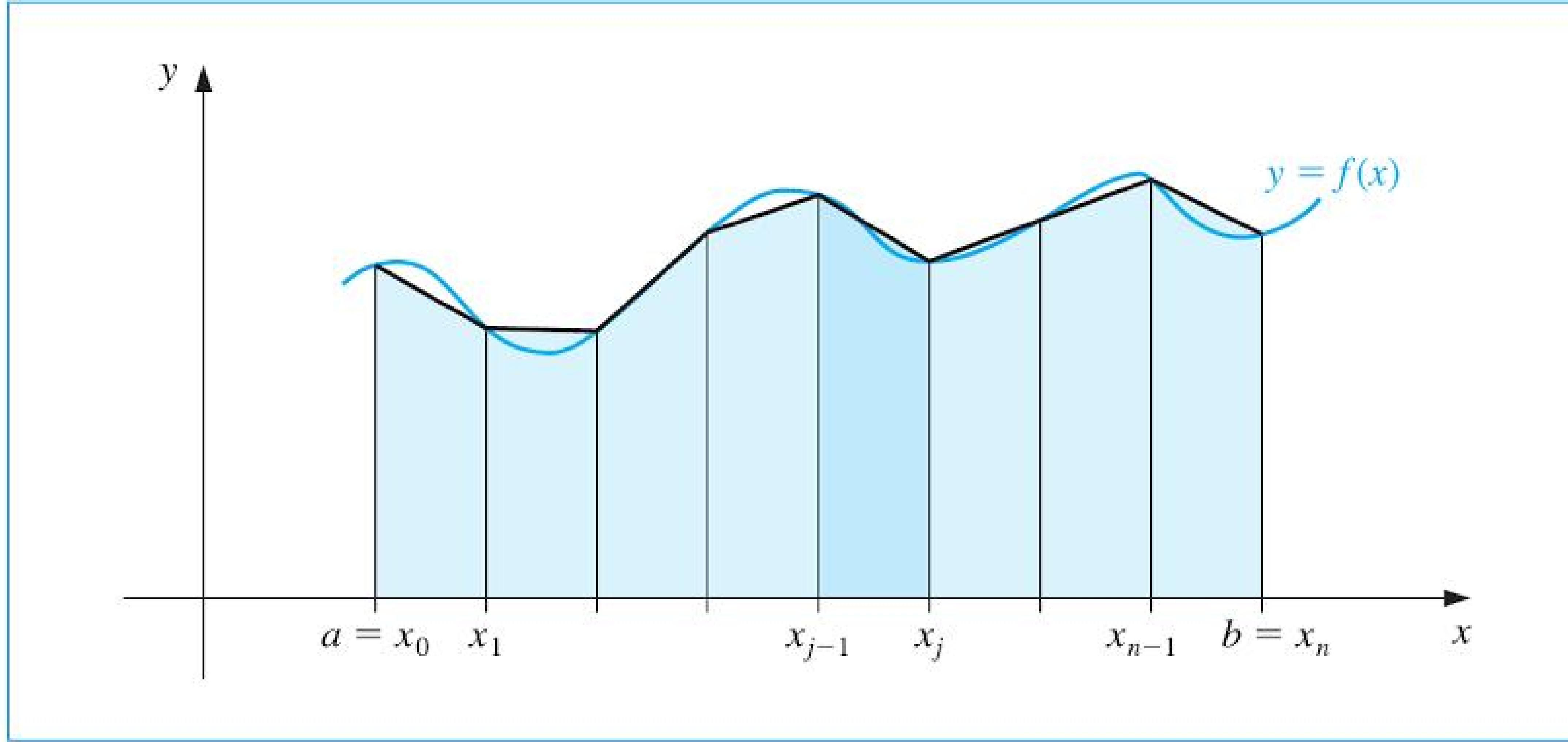
الخطوة	المضمون
1	ضع $h = (b-a)/n$.
2	ضع $XI0 = f(a) + f(b)$ $XI1 = 0$ (مجموع الدالة $f(x_{2i}-1)$) $XI2 = 0$ (مجموع الدالة $f(x_{2i})$)
3	كرر الخطوتين 4 و 5 لكل $i = 1, \ldots, n-1$.
4	ضع $X = a + ih$.
5	إذا كان i عددًا زوجيًا فضع $XI2 = XI2 + f(X)$ وإلا فضع $XI1 = XI1 + f(X)$.
6	ضع $XI = h(XI0 + 2 \cdot XI2 + 4 \cdot XI1)/3$.
7	المخرجات (XI) توقف.

■

يمكن تطبيق طريقة التجزئة لأي من صيغ نيوتن– كوتس.

إن تعميمات قاعدة شبه المنحرف (انظر شكل 8.4) وقاعدة النقطة الوسيطية أُعطيت دون برهان.

شكل 8.4



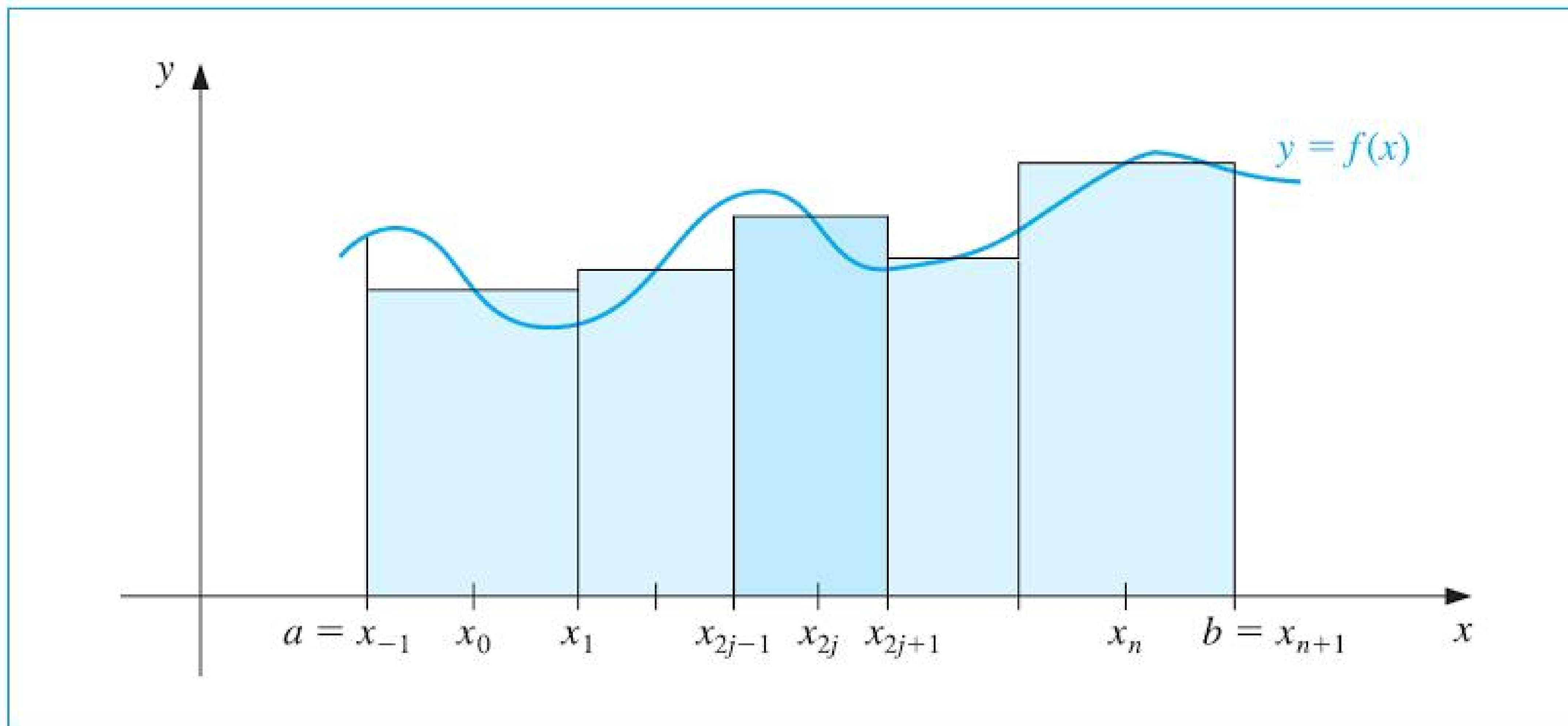
بما أن قاعدة شبه المنحرف تتطلب فترة واحدة لكل تطبيق، فإن العدد الصحيح n يمكن أن يكون فرديًّا أو زوجيًّا.

مبرهنة 5.4 ليكن $f \in C^2[a, b]$، $h = (b - a)/n$ و $x_j = a + jh$ لكل $j = 0, 1, \ldots, n$. عندئذ يوجد $\mu \in (a, b)$ بحيث إن قاعدة شبه المنحرف المركبة يمكن كتابتها مع حد الخطأ لكل n من الفترات الجزئية على الصيغة الآتية:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \frac{h}{2}\left[f(a) + 2\sum_{j=1}^{n-1} f(x_j) + f(b)\right] - \frac{b-a}{12}h^2 f''(\mu)$$ ■

أما قاعدة النقطة الوسيطية المركبة فإن n يجب أن يكون أيضًا زوجيًّا. (انظر شكل 9.4)

شكل 9.4



مبرهنة 6.4 ليكن $f \in C^2[a, b]$، n عددًا زوجيًّا، $h = (b - a)/(n + 2)$ و $x_j = a + (j + 1)h$ لكل $j = -1, 0, \ldots, n + 1$. عندئذ يوجد $\mu \in (a, b)$ بحيث يمكن كتابة قاعدة النقطة الوسيطية

المركبة مع حد الخطأ فيها لكل $(n+2)$ من الفترات الجزئية على الصيغة الآتية:

$$\int_a^b f(x)\,dx = 2h\sum_{j=0}^{n/2} f(x_{2j}) + \frac{b-a}{6}h^2 f''(\mu)$$

■

مثال 1 ليكن المطلوب تقريب $\int_0^\pi \sin x\,dx$ بخطأ مطلق أقل من 0.00002 باستخدام قاعدة سمبسون المركبة. إن قاعدة سمبسون المركبة تعطي لعدد ما $\mu \in (a, b)$ الصيغة الآتية:

$$\int_0^\pi \sin x\,dx = \frac{h}{3}\left[2\sum_{j=1}^{(n/2)-1} \sin x_{2j} + 4\sum_{j=1}^{n/2} \sin x_{2j-1}\right] - \frac{\pi h^4}{180}\sin\mu$$

وبما أن الخطأ المطلق يجب أن يكون أقل من 0.00002 فعلينا أن نستخدم المتراجحة الآتية لتحديد n و h:

$$\left|\frac{\pi h^4}{180}\sin\mu\right| \le \frac{\pi h^4}{180} = \frac{\pi^5}{180n^4} < 0.00002$$

وباستكمال هذه الحسابات نحصل على $n \ge 18$. إذا كان $n = 20$ فإن الناتج هو $h = \pi/20$ وتعطينا الصيغة

$$\int_0^\pi \sin x\,dx \approx \frac{\pi}{60}\left[2\sum_{j=1}^{9}\sin\left(\frac{j\pi}{10}\right) + 4\sum_{j=1}^{10}\sin\left(\frac{(2j-1)\pi}{20}\right)\right] = 2.000006$$

وللتأكد من رتبة الدقة هذه؛ فإن استخدام قاعدة شبه المنحرف المركبة تستلزم أن

$$\left|\frac{\pi h^2}{12}\sin\mu\right| \le \frac{\pi h^2}{12} = \frac{\pi^3}{12n^2} < 0.00002$$

أو أن $n \ge 360$. وبما أن هذا يتطلب حسابات أكثر كثيرًا من تلك التي نحتاج إليها لقاعدة سمبسون المركبة، فإننا لا نريد استخدام قاعدة شبه المنحرف المركبة لهذه المسألة.

وبهدف المقارنة، فإن قاعدة شبه المنحرف المركبة باستخدام $n = 20$ و $h = \pi/20$ تعطي

$$\int_0^\pi \sin x\,dx \approx \frac{\pi}{40}\left[2\sum_{j=1}^{19}\sin\left(\frac{j\pi}{20}\right) + \sin 0 + \sin\pi\right] = \frac{\pi}{40}\left[2\sum_{j=1}^{19}\sin\left(\frac{j\pi}{20}\right)\right]$$

$$= 1.9958860$$

إن الجواب الصحيح هو 2، ولذلك فإن قاعدة سمبسون تعطينا جوابًا ضمن الخطأ، أما قاعدة شبه المنحرف باستخدام $n = 20$ فمن الواضح أنها لا تعطينا هذا الجواب. ■

إن معظم برامج CAS تتضمن قاعدة سمبسون المركبة وقاعدة شبه المنحرف المركبة.

أما في Maple فعليك أولًا الدخول إلى المكتبة حيث تكون معرفة بالأمر

```
>with(student)
```

أما طلبات طرائق الحل فهي trapezoid(f,x=a..b,n) و simpson(f,x=a..b,n)

أما مثالنا

```
>f:=sin(x)
```

$$f := \sin(x)$$

```
>trapezoid(f,x=0..Pi,20)
```

$$\frac{1}{20}\pi\left(\sum_{i=1}^{19}\sin\left(\frac{1}{20}i\pi\right)\right)$$

```
>evalf(%)
```

$$1.995885974$$

```
>evalf(simpson(f,x=0..Pi,20))
```

$$2.000006785$$

فإن قاعدة النقطة الوسيطية موجودة كذلك في مكتبة Maple ويمكن الوصول إليها بالأمر

```
>evalf(middlesum(f,  x=0...Pi,10))
```

التي تعطي التقريب 2.008248408

ولإيضاح رموز Maple لطريقة النقطة الوسيطية نعرّف $f(x), a, b, n, h$ بالأوامر

```
>f:=x->sin(x)
>a:=0;  b:=Pi;  n:=18;  h:=(b-a)/(n+2)
```

ونحتاج أيضًا إلى متغيّر لحساب الجمع الدوّار الذي نضع له القيمة الابتدائية 0.

```
>Tot:=0
```

وفي Maple تعرّف الحلقة المحكمة بالعد كما يلي:

```
for loop control variable from initial-value to terminal value do
      statement;
      statement;
      ⋮
      statement;
od;
```

نضع متغير تحكم الحلقة j، الذي يبدأ من 0 وينتهي في $n/2 = 9$ بخطوات متساوية مقدارها 1.

كل قيمة $j = 0, 1, \ldots, 9$ تستكمل الحلقة، ويُنجز كل حساب داخل الحلقة حتى نصل إلى كلمة od. أما الكلمات المستخدمة المخزونة فهي from، for، do، to، od. انتبه إلى عدم استخدام (;) بعد كلمة do

```
> for j from 0 to n/2 do
> xj:=a+(2*j+1)*h;
> Tot:=evalf(Tot+f(xj))
>od
```





أ. ادرس الاتصال لمشتقات f.

ب. استخدم قاعدة شبه المنحرف لتقريب $\int_0^{0.3} f(x)\,dx$ مستخدمًا $n = 6$، وقدّر الخطأ باستخدام حدّ الخطأ.

ج. استخدم قاعدة سمبسون المركبة مستخدمًا $n = 6$ لتقريب $\int_0^{0.3} f(x)\,dx$. هل النتائج أدقُّ مما هي في (ب)؟

16. أثبت أن الخطأ $E(f)$ لقاعدة سمبسون المركبة يمكن تقريبه بالمقدار

$$-\frac{h^4}{180}[f'''(b) - f'''(a)]$$

[إضاءة: $\sum_{j=1}^{n/2} f^{(4)}(\xi_j)(2h)$ هي مجموع ريمان للتكامل $\int_a^b f^{(4)}(x)\,dx$]

17. أ. اشتق تقديرًا للخطأ $E(f)$ في قاعدة شبه المنحرف المركبة مستخدمًا الطريقة في التمرين (16).

ب. كرّر الفقرة (أ) لقاعدة النقطة الوسيطية المركبة.

18. استخدم تقدير الخطأ في التمرينين (16) و (17) لتقدير الأخطاء في التمرين (12).

19. استخدم تقدير الخطأ في التمرينين (16) و (17) لتقدير الأخطاء في التمرين (14).

20. يُبرهَن في حساب التفاضل والتكامل متعدد المتغيرات، وفي مقررات الإحصاء أن

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-(1/2)(x/\sigma)^2}\,dx = 1$$

لأي قيمة موجبة σ.

إن الدّالة $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-(1/2)(x/\sigma)^2}$ تسمى دالة الكثافة الاحتمالية الطبيعية ذات المعدل $\mu = 0$ والانحراف المعياري σ.

إن احتمال وقوع أي قيمة مختارة عشوائيًّا خاضعة لهذا التوزيع في الفترة $[a, b]$ هو $\int_a^b f(x)\,dx$.

أعطِ التقريب ضمن 10^{-5} لاحتمال أن أي قيمة مختارة عشوائيًّا وخاضعة لهذا التوزيع ستقع في كل فترة مما يلي:

أ. $[-\sigma, \sigma]$ ب. $[-2\sigma, 2\sigma]$ جـ. $[-3\sigma, 3\sigma]$

21. أوجد ضمن 10^{-6} طول منحنى القطع الناقص الذي معادلته $4x^2 + 9y^2 = 36$.

22. تقطع سيارة طريق السباق في 84 ثانية، وتحدّد سرعة السيارة في كل فترة مدتها 6 ثوانٍ باستخدام مسدس رادار، ويعطى مع بداية السباق بالقدم/ ثانية كما في جدول الآتي

الوقت	0	6	12	18	24	30	36	42	48	54	60	66	72	78	84
السرعة	124	134	148	156	147	133	121	109	99	85	78	89	104	116	123

ما طول طريق السباق؟

23. جسيم كتلته m يتحرك في سائل، ويخضع لمقاومة لزوجة R التي هي دالة في السرعة v تعطى العلاقة بين المقاومة R والسرعة v، والزمن t بالصيغة الآتية:

$$t = \int_{v(t_0)}^{v(t)} \frac{m}{R(u)}\,du$$

افترض أن $R(v) = -v\sqrt{v}$ لسائل ما، حيث وحدة R نيوتن والسرعة متر/ الثانية.

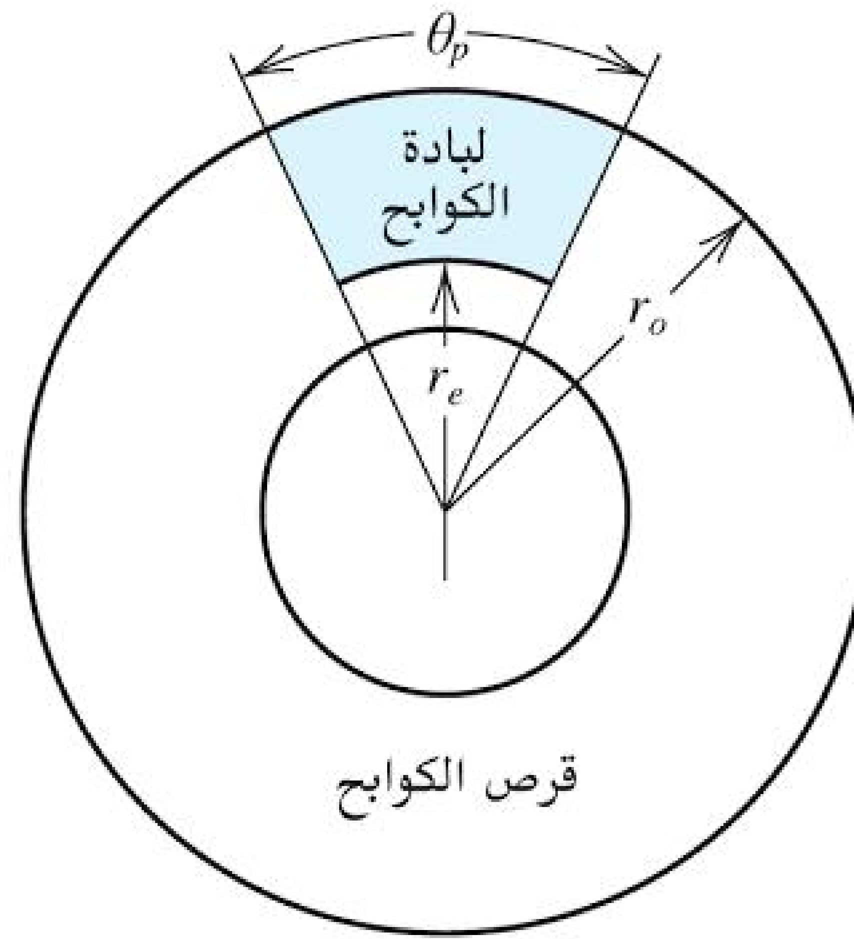
إذا كان $m = 10$ kg، $v(0) = 10$ m/s، فأوجد تقريبًا للزمن اللازم للجسيم ليتباطأ وتصل سرعته إلى $v = 5$ m/s.

24. لتوليد محاكاة خصائص قرص الكوابح (انظر شكل الآتي)، احتاج سيكرست وهورنبك D.A. Secrist and R.W. Hornbeck [SH] لإيجاد تقريب عددي لقيمة «الحرارة الداخلية معدّلة بحسب المساحة» T، إلى لبادة الكابح المعطاة بالصيغة

$$T = \frac{\int_{r_e}^{r_0} T(r) r\theta_p \, dr}{\int_{r_e}^{r_0} r\theta_p \, dr}$$

حيث تمثل r_e نصف القطر التي تبدأ عندها ملامسة لبادة القرص، وتمثل r_0 نصف القطر الخارجي للبادة القرص، أما θ_p فتمثل قياس الزاوية المقابلة لقطاع لبادة الكابح و$T(r)$ رتبة الحرارة على كل نقطة من اللبادة التي تحسب عدديًا من تحليل صيغة الحرارة. (انظر الفصل 2.12)

افترض $r_0 = 0.478$ ft، $r_e = 0.308$ ft، $\theta_p = 0.7051$ رادين، ودرجات الحرارة كما في الجدول الآتي حيث حسبت على نقاط متعددة على القرص. أوجد تقريبًا لقيمة T.



r (ft)	$T(r)$(°F)
0.308	640
0.325	794
0.342	885
0.359	943
0.376	1034
0.393	1064
0.410	1114
0.427	1152
0.444	1204
0.461	1222
0.478	1239

25. أوجد تقريبًا ضمن 10^{-4} لقيمة التكامل الآتي الذي نوقِش في بداية الفصل الأول

$$\int_0^{48} \sqrt{1 + (\cos x)^2} \, dx$$

26. يمكن حل الصيغة الآتية لإيجاد x

$$\int_0^x \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-t^2/2} \, dt = 0.45$$

باستخدام طريقة نيوتن مع

$$f(x) = \int_0^x \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-t^2/2} \, dt - 0.45$$

و

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$$

ولتقييم f عند التقريب p_k نحتاج إلى صيغة تربيعية لتقريب

$$\int_0^{p_k} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-t^2/2} \, dt$$

أ. أوجد حلًا دقيقًا لـ $f(x) = 0$ لغاية 10^{-5} مستخدمًا طريقة نيوتن مع $p_0 = 0.5$ وقاعدة سمبسون المركبة.

ب. أعد الفقرة (أ) مستخدمًا قاعدة شبه المنحرف المركبة بدلًا من قاعدة سمبسون المركبة.

5.4 تكامل رومبرج Romberg Integration

قدّم ويرنر رومبـرج (2003-1909) هذه الطريقة عام 1955 لتحسـين دقة قاعدة شـبه المنحرف عن طريق حذف الحدود المتتالية في التوسع التقاربي.

يستخدم تكامل رومبرج قاعدة شبه المنحرف المركبة لإيجاد تقريبات ابتدائية، ثم يطبق عملية استكمال ريتشاردسون لتحسين التقريبات. تذكر من الفصل (2.4) أن استكمال ريتشاردسون يمكن تطبيقه على أي عملية تقريب على الصيغة

$$M - N(h) = K_1h + K_2h^2 + \cdots + K_nh^n$$

حيث $K_1, K_2, \ldots, K_n$ ثوابت و $N(h)$ هو تقريب للقيمة غير المعلومة M. إن خطأ القطع في هذه الصيغة محدود بالقيمة K_1h عندما تكون h صغيرة، ولذلك فإن هذه الصيغة تعطي تقريبات من نوع $O(h)$. يستخدم استكمال ريتشاردسون تقنية تعديل لتعطي صيغ ذات خطأ قطع من رتب أعلى.

لقد رأينا في الفصل (2.4) كيفية استخدام ذلك للحصول على تقريبات المشتقة.
سنستخدم في هذا الفصل طريقة الاستكمال الخارجي لتقريب التكاملات المحدودة.
للبدء بشرح طريقة تكامل رومبرج، تذكر أن طريقة شبه المنحرف لتقريب تكامل دالّة ما f على الفترة $[a, b]$ باستخدام m فترة جزئية هي

$$\int_a^b f(x)\,dx = \frac{h}{2}\left[f(a) + f(b) + 2\sum_{j=1}^{m-1} f(x_j)\right] - \frac{(b-a)}{12}h^2 f''(\mu)$$

حيث $a < \mu < b, h = (b-a)/m$ و $x_j = a + jh$ لكل من $j = 0, 1, \ldots, m$.
ليكن n عددًا صحيحًا موجبًا. وإن أول خطوة في عملية رومبرج هي التوصل إلى تقريبات قاعدة شبه المنحرف بأخذ $m_1 = 1, m_2 = 2, m_3 = 4, \ldots$ و $m_n = 2^{n-1}$.
إن حجم الخطوة h_k المقابلة لـ m_k هي $h_k = (b-a)/m_k = (b-a)/2^{k-1}$. باستخدام هذه الرموز تصبح قاعدة شبه المنحرف

$$\int_a^b f(x)\,dx = \frac{h_k}{2}\left[f(a) + f(b) + 2\left(\sum_{i=1}^{2^{k-1}-1} f(a + ih_k)\right)\right] - \frac{(b-a)}{12}h_k^2 f''(\mu_k) \qquad (31.4)$$

حيث لكل k يكون μ_k عددًا ما في (a, b).
فإذا استخدمنا الرمز $R_{k,1}$ ليعبّر عن جزء الصيغة (31.4) المستخدم للتقريب بقاعدة شبه المنحرف فإن

$$R_{1,1} = \frac{h_1}{2}[f(a) + f(b)] = \frac{(b-a)}{2}[f(a) + f(b)]$$

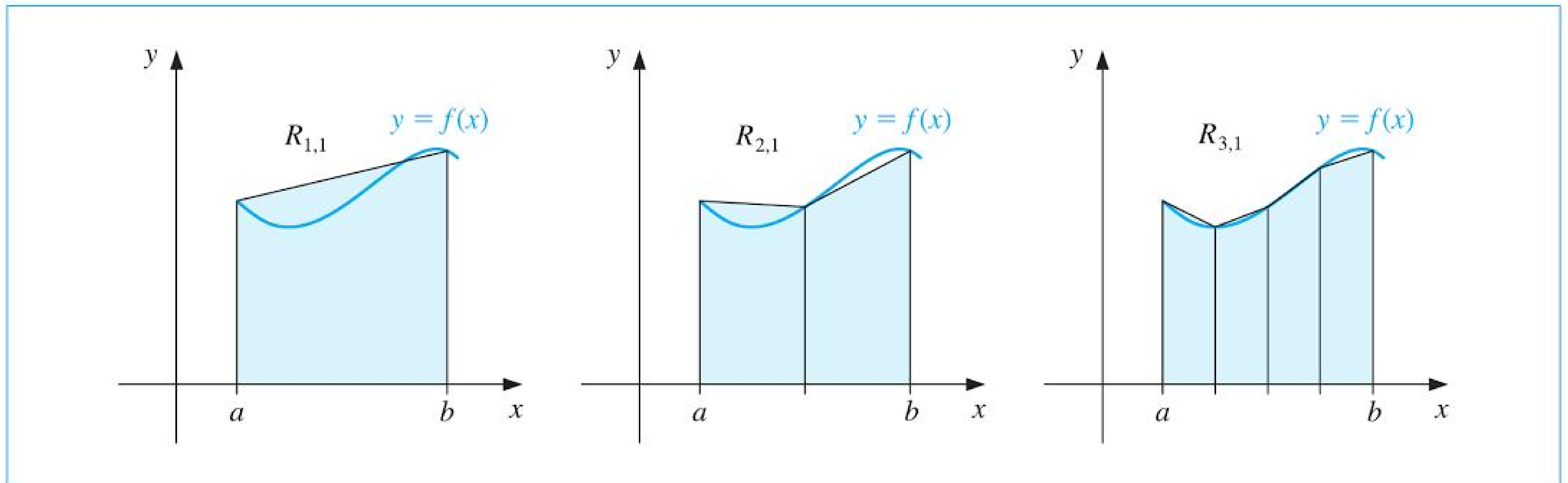
$$R_{2,1} = \frac{h_2}{2}[f(a) + f(b) + 2f(a + h_2)]$$

$$= \frac{(b-a)}{4}\left[f(a) + f(b) + 2f\left(a + \frac{(b-a)}{2}\right)\right]$$

$$= \frac{1}{2}[R_{1,1} + h_1 f(a + h_2)]$$

$$R_{3,1} = \frac{1}{2}\{R_{2,1} + h_2[f(a + h_3) + f(a + 3h_3)]\}$$

شكل 10.4



وعمومًا (انظر شكل 10.4) يكون

$$R_{k,1} = \frac{1}{2}\left[R_{k-1,1} + h_{k-1}\sum_{i=1}^{2^{k-2}} f\,(a + (2i - 1)h_k)\right] \tag{32.4}$$

لكل $k = 2, 3, \ldots ,\ n$ (انظر التمرينين 14،15).

مثال 1 إن استخدام قاعدة شبه المنحرف المركبة لتنفيذ الخطوة الأولى من طريقة تكامل رومبرج لتقريب $\int_0^\pi \sin x\,dx$ بأخذ $n = 6$ يؤدي إلى:

$$R_{1,1} = \frac{\pi}{2}[\sin 0 + \sin \pi] = 0$$

$$R_{2,1} = \frac{1}{2}\left[R_{1,1} + \pi \sin \frac{\pi}{2}\right] = 1.57079633$$

$$R_{3,1} = \frac{1}{2}\left[R_{2,1} + \frac{\pi}{2}\left(\sin \frac{\pi}{4} + \sin \frac{3\pi}{4}\right)\right] = 1.89611890$$

$$R_{4,1} = \frac{1}{2}\left[R_{3,1} + \frac{\pi}{4}\left(\sin \frac{\pi}{8} + \sin \frac{3\pi}{8} + \sin \frac{5\pi}{8} + \sin \frac{7\pi}{8}\right)\right] = 1.97423160$$

$$R_{5,1} = 1.99357034$$

و $R_{6,1} = 1.99839336$ ■

وبما أن القيمة الصحيحة للتكامل في المثال (1) هي 2، فإن التقارب بطيء. سنستخدم استكمال ريتشاردسون الخارجي لتسريع التقارب.

يمكن برهنة –ولو أن ذلك ليس بسهولة– (انظر [RR, pp. 136–138]) أنه إذا كان $f \in C^\infty[a, b]$ فإنه يمكن كتابة قاعدة شبه المنحرف المركبة ذات حد خطأ بديل على الصيغة

$$\int_a^b f(x)\,dx - R_{k,1} = \sum_{i=1}^{\infty} K_i h_k^{2i} = K_1 h_k^2 + \sum_{i=2}^{\infty} K_i h_k^{2i} \tag{33.4}$$

حيث كل K_i مستقلة عن h_k ومعتمدة على $f^{(2i-1)}(a)$ و $f^{(2i-1)}(b)$.

ومن قاعدة شبه المنحرف على هذه الصيغة، يمكننا حذف الحد المحتوي على h_k^2 بدمج هذه الصيغة مع تلك المقابلة لها، وبوضع $h_{k+1} = h_k/2$ بدلاً من h_k لنحصل على

$$\int_a^b f(x)\,dx - R_{k+1,1} = \sum_{i=1}^{\infty} K_i h_{k+1}^{2i} = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{K_i h_k^{2i}}{2^{2i}} = \frac{K_1 h_k^2}{4} + \sum_{i=2}^{\infty} \frac{K_i h_k^{2i}}{4^i} \qquad (34.4)$$

وبطرح الصيغة (33.4) من 4 أمثال الصيغة (34.4) وبالتبسيط نحصل على الصيغة بدرجة $O(h_k^4)$.

$$\int_a^b f(x)\,dx - \left[R_{k+1,1} + \frac{R_{k+1,1} - R_{k,1}}{3}\right] = \sum_{i=2}^{\infty} \frac{K_i}{3}\left(\frac{h_k^{2i}}{4^{i-1}} - h_k^{2i}\right)$$
$$= \sum_{i=2}^{\infty} \frac{K_i}{3}\left(\frac{1-4^{i-1}}{4^{i-1}}\right) h_k^{2i}$$

ثم يمكن تطبيق الاستكمال الخارجي على هذه الصيغة للحصول على نتيجة من الرتبة $O(h_k^6)$ وهكذا. ولتبسيط الرموز نعرّف

$$R_{k,2} = R_{k,1} + \frac{R_{k,1} - R_{k-1,1}}{3}$$

لكل n ,... ,$k = 2, 3$ ونطبق استكمال ريتشاردسون الخارجي لهذه القيم.
وبالاستمرار في هذه الرموز، ولكل $k = 2, 3, 4, \ldots, n$ و $j = 2, \ldots, k$ نحصل على صيغة تقريب من الرتبة $O(h_k^{2j})$ معرّفة على الصورة

$$R_{k,j} = R_{k,j-1} + \frac{R_{k,j-1} - R_{k-1,j-1}}{4^{j-1} - 1} \qquad (35.4)$$

تظهر النتائج التي نتجت من هذه الصيغ في جدول (9.4).

جدول 9.4

$R_{1,1}$					
$R_{2,1}$	$R_{2,2}$				
$R_{3,1}$	$R_{3,2}$	$R_{3,3}$			
$R_{4,1}$	$R_{4,2}$	$R_{4,3}$	$R_{4,4}$		
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	
$R_{n,1}$	$R_{n,2}$	$R_{n,3}$	$R_{n,4}$	$\cdots$	$R_{n,n}$

إن طريقة رومبرج تحظى بميزة إضافية مرغوب فيها ألا وهي إمكانية حساب صف جديد كامل في جدول عن طريق تطبيق قاعدة شبه المنحرف مرة إضافية واحدة فقط، وبعد ذلك تستخدم لإيجاد بقية مدخلات الصف.

إن الطريقة المستخدمة لإنشاء جدول من هذا النوع تحسب المدخلات صفًا صفًا أي على الترتيب $R_{1,1}$، $R_{2,1}$، $R_{2,2}$، $R_{3,1}$، $R_{3,2}$، $R_{3,3}$، الخ.

تصف الخوارزمية (2.4) هذه الطريقة.

ALGORITHM
الخوارزمية
2.4

رومبرج Romberg

لتقريب التكامل $I = \int_a^b f(x)\,dx$؛ اختر عددًا صحيحًا $n > 0$.

المدخلات: نقاط النهاية a و b و n عدد صحيح.

المخرجات: مصفوفة R (احسب R وفق الصفوف، يُحفَظ آخر صفين فقط).

الخطوة	المضمون
1	ضع $h = b - a;$ $R_{1,1} = h/2(f(a) + f(b))$
2	المخرجات $(R_{1,1})$.
3	عند $i = 2, \ldots, n$، طبّق الخطوات 4 – 8.
4	ضع $R_{2,1} = \frac{1}{2}\left[R_{1,1} + h\sum_{k=1}^{2^{i-2}} f(a + (k - 0.5)h)\right]$ (تقريب من طريقة شبه المنحرف).
5	عند $j = 2, \ldots, i$ ضع $R_{2,j} = R_{2,j-1} + \frac{R_{2,j-1} - R_{1,j-1}}{4^{j-1} - 1}$ (استيفاء خارجي).
6	المخرجات ($R_{2,j}$ عند $j = 1, 2, \ldots, i$).
7	ضع $h = h/2$.
8	عند $j = 1, 2, \ldots, i$ ضع $R_{1,j} = R_{2,j}$ (تحديث الصف الأول من R).
9	توقف.

مثال 2

في المثال (1)، حسبت القيم $R_{1,1}$ حتى $R_{6,1}$ لإيجاد التقريب للتكامل $\int_0^{\pi} \sin x\, dx$. نشاهد مع الخوارزمية (2.4) جدول رومبرج في جدول (10.4).

وعلى الرغم من وجود 21 من المدخلات في هذا الجدول، إلا أن الستة في العمود الأول فقط تتطلب إيجاد قيم دالّة؛ لأن هذه القيم فقط هي التي تنتج باستخدام قاعدة شبه المنحرف المركبة. ونجد المدخلات الأخرى باستخدام طريقة المعدل.

لاحظ أن القيم الناتجة جميعها بالاستكمال الخارجي عدا الأولى (في الصف الأول للعمود الثاني) هي أدق من أحسن تقريب ناتج من قاعدة شبه المنحرف المركبة (في الصف الأخير للعمود الأول).

جدول 10.4

0					
1.57079633	2.09439511				
1.89611890	2.00455976	1.99857073			
1.97423160	2.00026917	1.99998313	2.00000555		
1.99357034	2.00001659	1.99999975	2.00000001	1.99999999	
1.99839336	2.00000103	2.00000000	2.00000000	2.00000000	2.00000000

تتطلب الخوارزمية (2.4) عددًا صحيحًا n يُحدّد مسبقًا؛ وذلك لتحديد عدد الصفوف التي يجب توليدها. ويمكننا أيضًا تحديد الخطأ المقبول للتقريب، ومن ثم توليد n ضمن حد أعلى، إلى أن تقع المدخلات القطرية المتتالية $R_{n,n}$ و $R_{n-1,n-1}$ ضمن حد الخطأ المقبول.

ولكي نضمن عدم تساوي أي قيمتين متتاليتين في صف واحد دون تطابقهما مع قيمة التكامل الجاري تقريبها ؛ فقد جرت العادة بتوليد تقريبات حتى لا يكون $|R_{n-1,n-1} - R_{n,n}|$ فقط ضمن حد الخطأ المقبول، بل ينطبق ذلك أيضًا على $|R_{n-2,n-2} - R_{n-1,n-1}|$.
وعلى الرغم من أن هذا ليس احتياطًا عاليًّا، إلا أنه يضمن أن مجموعتين من التقريب تولدتا بطريقتين مختلفتين قد تطابقتا ضمن حد الخطأ المقبول قبل قبول $R_{n,n}$ بوصفها قيمة صحيحة بدرجة كافية. إن تطبيق تكامل رومبرج على f المعرّف على $[a, b]$ يعتمد على افتراض أن لقاعدة شبه المنحرف المركبة حد خطأ يمكن التعبير عنه بصيغة الصيغة (4.33)، بمعنى وجوب توليد $f \in C^{2k+2}[a, b]$ للصف رتبة k. خوارزمية الغرض العام باستخدام تكامل رومبرج تتضمن تدقيقًا عند كل خطوة لضمان تحقق هذا الافتراض. هذه الطرائق معروفة باسم *cautious Romberg algorithms* وهي موضحة في [Joh]. وهذا المصدر يوضح أيضًا طرائق لاستخدام أسلوب رومبرج بصفتها عملية متبناة، مثلما الحال مع قاعدة سمبسون التي سنتناولها في الفصل (6.4).

إن الصفة cautious "حذِّر" المستخدمة في طريقة عددية ما تظهر أن فحصًا يستخدم لتحديد ما إذا كانت فرضيات الاتصال من المحتمل أن تكون صحيحة.

EXERCISE SET مجموعة التمارين 5.4

1. استخدم تكامل رومبرج لحساب $R_{3,3}$ للتكاملات الآتية:

أ. $\int_1^{1.5} x^2 \ln x\, dx$ ب. $\int_0^1 x^2 e^{-x}\, dx$ جـ. $\int_0^{0.35} \frac{2}{x^2-4}\, dx$

د. $\int_0^{\pi/4} x^2 \sin x\, dx$ هـ. $\int_0^{\pi/4} e^{3x} \sin 2x\, dx$ و. $\int_1^{1.6} \frac{2x}{x^2-4}\, dx$

ز. $\int_3^{3.5} \frac{x}{\sqrt{x^2-4}}\, dx$ حـ. $\int_0^{\pi/4} (\cos x)^2\, dx$

2. استخدم تكامل رومبرج لحساب $R_{3,3}$ للتكاملات الآتية:

أ. $\int_{-1}^{1} (\cos x)^2\, dx$ ب. $\int_{-0.75}^{0.75} x \ln(x+1)\, dx$

جـ. $\int_1^4 \left((\sin x)^2 - 2x \sin x + 1\right) dx$ د. $\int_e^{2e} \frac{1}{x \ln x}\, dx$

3. احسب $R_{4,4}$ للتكاملات في التمرين (1).
4. احسب $R_{4,4}$ للتكاملات في التمرين (2).
5. استخدم تكامل رومبرج لتقريب التكاملات في التمرين (1) ضمن 10^{-6}. احسب جدول رومبرج حتى يصبح $|R_{n-1,n-1} - R_{n,n}| < 10^{-6}$ أو $n = 10$ قارن نتائجك بالقيم الصحيحة للتكاملات.
6. استخدم تكامل رومبرج لتقريب التكاملات في التمرين (2) ضمن 10^{-6}. احسب جدول رومبرج حتى يصبح $|R_{n-1,n-1} - R_{n,n}| < 10^{-6}$ أو $n = 10$. قارن نتائجك بالقيم الصحيحة للتكاملات.
7. استخدم البيانات الآتية لتقريب $\int_1^5 f(x)\, dx$ لأكبر دقة ممكنة:

x	1	2	3	4	5
$f(x)$	2.4142	2.6734	2.8974	3.0976	3.2804

8. استخدم تكامل رومبرج لتقريب

$$\int_0^1 \frac{x^2}{1+x^3}\, dx$$

إذا كان $R_{11} = 0.250$ و $R_{22} = 0.2315$ أوجد R_{21}.

9. استخدم تكامل رومبرج لتقريب $\int_2^3 f(x)\,dx$.
إذا كان $R_{31} = 0.43687$, $f(3) = 0.36788$, $f(2) = 0.51342$ و $R_{33} = 0.43662$ فجد $f(2.5)$.

10. يعطي تكامل رومبرج لتقريب $\int_0^1 f(x)\,dx$ ما يلي: $R_{11} = 4$ و $R_{22} = 5$. أوجد $f(\frac{1}{2})$.

11. يعطي تكامل رومبرج لتقريب $\int_a^b f(x)\,dx$ ما يلي $R_{11} = 8$, $R_{22} = \frac{16}{3}$ و $R_{33} = \frac{208}{45}$ أوجد R_{31}.

12. استخدم تكامل رومبرج لحساب التقريبات الآتية لتكامل $\int_0^{48} \sqrt{1 + (\cos x)^2}\,dx$.
[ملحوظة: إن نتائج هذا التمرين مهمة جدًّا إذا ما استخدمت طريقة حساب ما بين سبع وتسع منازل].

أ. احسب $R_{1,1}$، $R_{2,1}$، $R_{3,1}$، $R_{4,1}$ و $R_{5,1}$، واستخدم هذه التقريبات للتنبؤ بقيمة التكامل.

ب. احسب $R_{2,2}$، $R_{3,3}$، $R_{4,4}$ و $R_{5,5}$ وعدّل تنبؤك.

جـ. احسب $R_{6,1}$، $R_{6,2}$، $R_{6,3}$، $R_{6,4}$ و $R_{6,6}$ وعدّل تنبؤك.

د. احسب $R_{7,7}$، $R_{8,8}$، $R_{9,9}$ و $R_{10,10}$ وأعطِ التنبؤ النهائي.

هـ. وضّح لماذا يسبب هذا التكامل صعوبة لدى استخدام تكامل رومبرج، واشرح كيف يمكن إعادة صياغته لتحديد تقريب دقيق بسهولة.

13. برهن أن التقريب الناتج من $R_{k,2}$ هو التقريب نفسه الذي نحصل عليه باستخدام قاعدة سمبسون المركبة التي شرحت في المبرهنة (4.4) بأخذ $h = h_k$.

14. برهن ما يلي لأي k:

$$\sum_{i=1}^{2^{k-1}-1} f\left(a + \frac{i}{2}h_{k-1}\right) = \sum_{i=1}^{2^{k-2}} f\left(a + \left(i - \frac{1}{2}\right)h_{k-1}\right) + \sum_{i=1}^{2^{k-2}-1} f(a + ih_{k-1}).$$

15. استخدم نتيجة تمرين 14 للتحقق من صيغة (32.4)؛ أي برهن ما يلي جميعها k:

$$R_{k,1} = \frac{1}{2}\left[R_{k-1,1} + h_{k-1}\sum_{i=1}^{2^{k-2}} f\left(a + \left(i - \frac{1}{2}\right)h_{k-1}\right)\right]$$

16. في التمرين 24 من الفصل (1.1)، ظهر تكامل متسلسلة ماكلورين لتقريب $\text{erf}(1)$، حيث $\text{erf}(x)$ دالة الخطأ في التوزيع الطبيعي المعرفة في الصيغة $\text{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^x e^{-t^2}\,dt$.
قرّب $\text{erf}(1)$ ضمن 10^{-7}.

6.4 طرائق التكامل التكيّفية Adaptive Quadrature Methods

إن الصيغ المركبة تتطلب استخدام نقاط تجزيئية متساوية المسافات. وهذا ليس مناسبًا عند تكامل دالة على فترة تحتوي على منطقتين: يكون على إحداهما تغير دالّي كبير، وعلى الأخرى تغير دالي صغير. وفي حالة اشتراط أن يكون خطأ التقريب موزعًا بالتجانس، فإن المسافة بين نقاط التجزئة يجب أن تكون أصغر على مناطق التغير الكبير منها على مناطق التغير الصغير. إن الطريقة الفاعلة لهذا النوع من المسائل يجب أن تنبئ عن كمية التغيير الدالّي وتكيّف حجم الخطوة (المسافة في التجزئة) للمتطلبات المتغيرة.

تسمى هذه الطرائق طرائق التكامل التكيفية.

إن الطرائق العددية التكيفية مرغوب فيها خصوصًا لإدخالها في الحقائب التخصصية الناعمة، وذلك ليس لكونها فاعلة فقط، بل لأنها أيضًا تعطي تقريبات ضمن حد الخطأ المحدّد والمسموح بــه. سـنبحث في هذا الفصل طريقــة تكامل تكيّفية ونرى كيف يمكن اســتخدامها، ليس فقط







استخدم هامش أمان عند استحالة التحقق من افتراضات الدقة.

وعلى الرغم من أنه بالإمكان إنشاء مسائل لا يمكن الحصول فيها على الخطأ المسموح، إلا أن الطريقة عادة ما تكون ناجحة؛ لأن كل تجزئة تزيد عادة من دقة التقريب بعامل 16، حيث يكون المطلوب زيادة عامل الدقة باثنين فقط.

تعطي الخوارزمية (3.4) تفاصيل عملية التكامل التكيفية لقاعدة سمبسون، على الرغم من ظهور بعض الصعوبات التقنية التي تتطلب تخلف التنفيذ قليلًا عمّا شرح سابقًا. فعلى سبيل المثال في الخطوة الأولى، اختبر الخطأ المسموح ليكون 10ε بدلًا من العدد 15ε في المتراجحة (39.4).
لقد اختير هذا الحد اختيارًا محافظًا للتعويض عن الخطأ في الافتراض $f^{(4)}(\mu) \approx f^{(4)}(\tilde{\mu})$.
وفي المسائل التي يكون فيها $f^{(4)}$ ذا تغير واسع، فعليك أن تخفض هذا الحد على نحو أكبر.
إن الطريقة المذكورة في الخوارزمية تقرب أولًا التكامل على الفترة الجزئية في أقصى يسار التجزئة. ويتطلب هذا طريقة فاعلة في حفظ القيم الدالّية المحسوبة على نقاط التجزئة في النصف الأيمن للفترات الجزئية واسترجاع تلك القيم.

تحتوي الخطوات 3، 4 و 5 على عملية تخزين مع مؤشر يسمح بتتبع البيانات المطلوبة لحساب التقريب على الفترة الجزئية المجاورة مباشرة على يمين الفترة الجزئية التي تولّد التقريب عليها. إن تنفيذ الطريقة يكون أسهل على حاسوب يستخدم لغة برمجة استرجاعية (recursive).

ALGORITHM
الخوارزمية
3.4

التكامل التكيفي Adaptive Quadrature

عملية التكامل التكيفية لتقريب التكامل $I = \int_a^b f(x)\,dx$ ضمن حد خطأ مسموح به.
المدخلات: نقاط النهاية a و b، حد الخطأ المسموح TOL، حدِّد N بعدد المستويات.
المخرجات: التقريب APP أو تقرير أن N قد تم تخطيها.

الخطوة	المضمون
1	ضع $APP = 0$ $i = 1;$ $TOL_i = 10\ TOL$ $a_i = a;$ $h_i = (b-a)/2$ $FA_i = f(a);$ $FC_i = f(a + h_i)$ $FB_i = f(b);$ $S_i = h_i(FA_i + 4FC_i + FB_i)/3$ (تقريب من طريقة سمبسون لكامل الفترة) $L_i = 1$
2	عند $i > 0$ طبّق الخطوات 3 — 5.
3	ضع $FD = f(a_i + h_i/2)$ $FE = f(a_i + 3h_i/2)$ $S1 = h_i(FA_i + 4FD + FC_i)/6$ (تقريب من طريقة سمبسون لنصف أجزاء الفترة) $S2 = h_i(FC_i + 4FE + FB_i)/6$ $v_1 = a_i$ (خزن المعلومات في هذا المستوى) $v_2 = FA_i$ $v_3 = FC_i$ $v_4 = FB_i$ $v_5 = h_i$ $v_6 = TOL_i$ $v_7 = S_i$ $v_8 = L_i$

4	ضع $i = i - 1$ (احذف المستوى.)
5	إذا كان $\text{v}_6 > \lvert S1 + S2 - \text{v}_7 \rvert$ فضع $APP = APP + (S1 + S2)$ وغير ذلك، إذا كان $(\text{v}_8 \geq N)$ فإن المخرجات ('LEVEL EXCEEDED') (العملية فشلت). توقف. غير ذلك (أضف مستوى واحدًا). ضع $i = i + 1$ (البيانات لنصف الفترة اليمنى) $a_i = \text{v}_1 + \text{v}_5$ $FA_i = \text{v}_3$ $FC_i = FE$ $FB_i = \text{v}_4$ $h_i = \text{v}_5/2$ $TOL_i = \text{v}_6/2$ $S_i = S2$ $L_i = \text{v}_8 + 1$ ضع $i = i + 1$ (البيانات لنصف الفترة اليسرى) $a_i = \text{v}_1$ $FA_i = \text{v}_2$ $FC_i = FD$ $FB_i = \text{v}_3$ $h_i = h_{i-1}$ $TOL_i = TOL_{i-1}$ $S_i = S1$ $L_i = L_{i-1}$
6	المخرجات (APP) (APP تقرب I بحدود TOL). توقف.

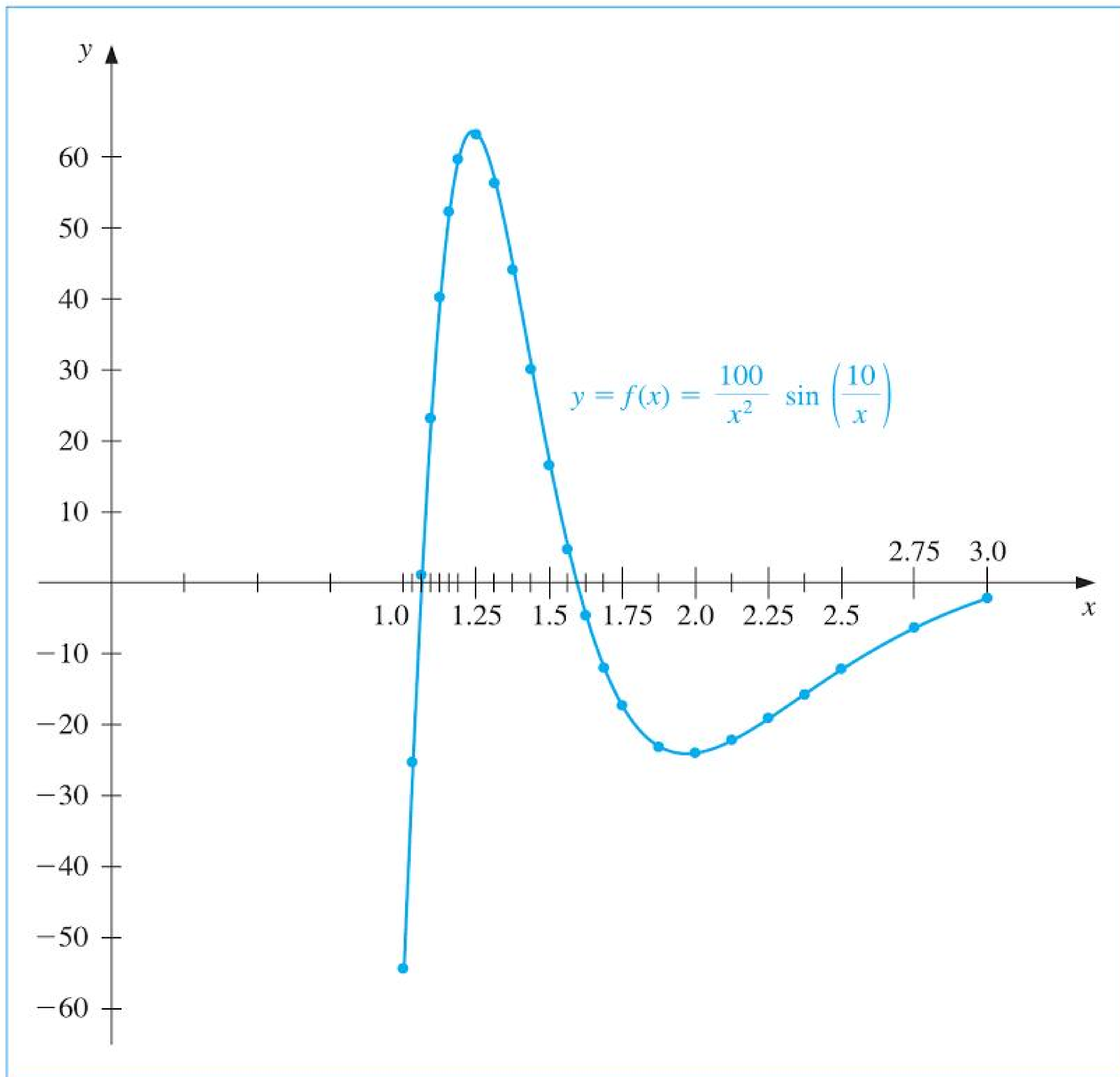
■

مثال 2

شكل (13.4) يعرض رسم منحنى الدّالة $f(x) = (100/x^2)\sin(10/x)$ لقيم x في الفترة $[1, 3]$. باستخدام خوارزمية التكامل التكيفية (3.4) ضمن حد الخطأ المسموح 10^{-4} لإيجاد تقريب للتكامل $\int_1^3 f(x)\,dx$ تعطي -1.426014 ، وهي نتيجة دقيقة بحد 1.1×10^{-5}.

لقد تطلب التقريب استخدام قاعدة سمبسون بأخذ $n = 4$ على 23 فترة جزئية عرضت نقاط النهاية لها على المحور الأفقي في شكل (13.4). إن عدد التقييمات الدالّية المطلوبة لهذا التقريب يساوي 93.

إن أكبر قيمة للعدد h المطلوبة لكي تنتج قاعدة سمبسون المركبة إجابة ضمن دقة 10^{-4} هي $h = \frac{1}{88}$. إن هذا التطبيق يتطلب 177 تقييمًا داليًّا، أي ما يعادل ضعف العدد المطلوب تقريبًا في عملية التكامل التكيفية. ■



شكل 13.4

مجموعة التمارين 6.4 EXERCISE SET

1. احسب تقريبات قاعدة سمبسون $S(a, b)$, $S(a, (a+b)/2)$ و $S((a+b)/2, b)$ للتكاملات الآتية، وتحقق من التقدير المعطى في صيغة التقريب:

أ. $\int_1^{1.5} x^2 \ln x \, dx$ ب. $\int_0^1 x^2 e^{-x} \, dx$ جـ. $\int_0^{0.35} \frac{2}{x^2-4} \, dx$ د. $\int_0^{\pi/4} x^2 \sin x \, dx$

هـ. $\int_0^{\pi/4} e^{3x} \sin 2x \, dx$ و. $\int_1^{1.6} \frac{2x}{x^2-4} \, dx$ ز. $\int_3^{3.5} \frac{x}{\sqrt{x^2-4}} \, dx$ حـ. $\int_0^{\pi/4} (\cos x)^2 \, dx$

2. استخدم طريقة التكامل التكيفية لإيجاد تقريبات ضمن 10^{-3} للتكاملات في التمرين (1)، ولا تستخدم برنامجًا حاسوبيًّا لتوليد هذه النتائج.

3. استخدم طريقة التكامل التكيفية لتقريب التكاملات الآتية ضمن 10^{-5}:

أ. $\int_1^3 e^{2x} \sin 3x \, dx$ ب. $\int_1^3 e^{3x} \sin 2x \, dx$

ج. $\int_0^5 \left(2x \cos(2x) - (x-2)^2\right) dx$ د. $\int_0^5 \left(4x \cos(2x) - (x-2)^2\right) dx$

4. استخدم طريقة التكامل التكيفية لتقريب التكاملات الآتية ضمن 10^{-5}:

أ. $\int_0^{\pi} (\sin x + \cos x)\, dx$ ب. $\int_1^{2} (x + \sin 4x)\, dx$

جـ. $\int_{-1}^{1} x \sin 4x\, dx$ د. $\int_0^{\pi/2} (6\cos 4x + 4\sin 6x) e^x\, dx$

5. استخدم سمبسون المركبة باستخدام $n = 4, 6, 8, \ldots$ إلى أن تتفق التقريبات المتتالية للتكاملات الآتية ضمن 10^{-6}، حدّد عدد الرؤوس (نقاط التقسيم) المطلوبة.
استخدم خوارزمية التكامل التكيفية لتقريب التكامل 10^{-6}، واحسب عدد الرؤوس، هل أدت عملية التكامل التكيفية إلى أي تحسين؟

أ. $\int_0^{\pi} x \cos x^2\, dx$ ب. $\int_0^{\pi} x \sin x^2\, dx$

جـ. $\int_0^{\pi} x^2 \cos x\, dx$ د. $\int_0^{\pi} x^2 \sin x\, dx$

6. ارسم منحنيات $\sin(1/x)$ و $\cos(1/x)$ على $[0.1, 2]$.
استخدم طريقة التكامل التكيفية لتقريب التكاملات الآتية ضمن 10^{-5}:

أ. $\int_{0.1}^{2} \cos \frac{1}{x}\, dx$ ب. $\int_{0.1}^{2} \sin \frac{1}{x}\, dx$

7. تصف الصيغة التفاضلية $mu''(t) + ku(t) = F_0 \cos \omega t$ نظام الزنبرك والكتلة، حيث الكتلة m k ثابت الزنبرك دون تخميد (damping)، ويصف الحد $F_0 \cos \omega t$ قوة خارجية دورية تطبق على النظام.
إن حل هذه الصيغة عندما يبدأ النظام في حالة سكون $(u'(0) = u(0) = 0)$ هو

$$u(t) = \frac{F_0}{m(\omega_0^2 - \omega^2)} (\cos \omega t - \cos \omega_0 t) \quad \text{حيث} \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} \neq \omega$$

ارسم منحنى u عندما $m = 1, k = 9, F_0 = 1, \omega = 2$ و $t \in [0, 2\pi]$.
أوجد التقريب للتكامل $\int_0^{2\pi} u(t)\, dt$ ضمن 10^{-4}.

8. إذا أضيف الحد $cu'(t)$ إلى الطرف الأيسر من صيغة الحركة في التمرين (7)، فإن الصيغة التفاضلية الناتجة تصف نظام الزنبرك والكتلة الذي خضع لتخميد بثابت تخميد $c \neq 0$.
إن حل هذه الصيغة عندما يبدأ النظام في حالة سكون هو

$$u(t) = c_1 e^{r_1 t} + c_2 e^{r_2 t} + \frac{F_0}{c^2\omega^2 + m^2(\omega_0^2 - \omega^2)^2} \left(c\omega \sin \omega t + m\left(\omega_0^2 - \omega^2\right) \cos \omega t\right)$$

حيث

$$r_1 = \frac{-c + \sqrt{c^2 - 4\omega_0^2 m^2}}{2m} \quad \text{و} \quad r_2 = \frac{-c - \sqrt{c^2 - 4\omega_0^2 m^2}}{2m}$$

أ. ليكن $m = 1$، $k = 9$، $F_0 = 1$، $c = 10$ و $\omega = 2$ فأوجد c_1 و c_2 ليكون $u(0) = u'(0) = 0$.

ب. ارسم المنحنى $u(t)$ لكل $t \in [0, 2\pi]$ وقرّب $\int_0^{2\pi} u(t)\, dt$ ضمن 10^{-4}.

9. ليكن $T(a, b)$ و $T(a, (a + b/2)) + T((a + b/2), b)$ التطبيق المنفرد والتطبيق الثنائي لقاعدة شبه المنحرف للتكامل $\int_a^b f(x)\, dx$.







إذا كانت $P(x)$ كثيرة حدود ذات درجة أصغر من $2n$ فإن

$$\int_{-1}^{1} P(x)\,dx = \sum_{i=1}^{n} c_i P(x_i)$$ ■

البرهان لنأخذ أولاً الحالة التي فيها $P(x)$ كثيرة حدود ذات رتبة أقل من n. أعد كتابة $P(x)$ على صيغة كثيرة حدود ليجندر من الرتبة $(n-1)$ برؤوس على جذور كثيرة حدود ليجندر $P_n(x)$ من الرتبة n. إن هذا التمثيل لكثيرة حدود $P(x)$ صحيح بالضبط، لأن حد الخطأ يحتوي على مشتقة P من الرتبة n، وأن مشتقة P من الرتبة n تساوي صفراً. إذن

$$P(x) = \sum_{i=1}^{n} \prod_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j} P(x_i)$$

و

$$\int_{-1}^{1} P(x)\,dx = \int_{-1}^{1} \left[\sum_{i=1}^{n} \prod_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j} P(x_i) \right] dx$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \left[\int_{-1}^{1} \prod_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}\,dx \right] P(x_i) = \sum_{i=1}^{n} c_i P(x_i)$$

تحقق النتيجة لكثيرات الحدود ذات الرتبة الأقل من n.

إذا قسمنا كثيرة الحدود $P(x)$ من الرتبة n على الأقل ولكن أقل من $2n$ على كثيرة حدود ليجندر $P_n(x)$، نحصل على كثيرات حدود ذات رتبة أقل من n.

$$P(x) = Q(x)P_n(x) + R(x)$$

لاحظ أنه بما أن x_i جذر لـ لكل $i = 1, 2, \ldots, n$، فإننا نحصل على

$$P(x_i) = Q(x_i)P_n(x_i) + R(x_i) = Q(x_i)\cdot 0 + R(x_i) = R(x_i)$$

والآن ندخل القوة الوحيدة لكثيرات حدود ليجندر.

أولاً: رتبة كثيرة الحدود $Q(x)$ أقل من n، ولذلك تكون (خاصية ليجندر الثانية)

$$\int_{-1}^{1} Q(x)P_n(x)\,dx = 0$$

وبما أن $R(x)$ كثيرة حدود ذات رتبة أقل من n، فإن المناقشة الأولى تعطي

$$\int_{-1}^{1} R(x)\,dx = \sum_{i=1}^{n} c_i R(x_i)$$

بوضع هذه الحقائق معًا يتحقق أن الصيغة صحيحة تمامًا لكثيرة الحدود $P(x)$

$$\int_{-1}^{1} P(x)\,dx = \int_{-1}^{1} [Q(x)P_n(x) + R(x)]\,dx = \int_{-1}^{1} R(x)\,dx = \sum_{i=1}^{n} c_i R(x_i) = \sum_{i=1}^{n} c_i P(x_i)$$

■ ■ ■

يمكن توليد الثوابت c_i التي نحتاج إليها لقاعدة التكامل من الصيغة في المبرهنة (7.4)، ولكن كلًّا من هذه الثوابت وجذور كثيرات حدود ليجندر قد تم جدولتا على نحو واسع.

يعرض جدول (11.4) هذه القيم لكل من $n = 2, 3, 4, 5$.

القيم الأخرى موجودة في [StS].

جدول 11.4

n	الجذور $r_{n,i}$	المعاملات $c_{n,i}$
2	0.5773502692	1.0000000000
	−0.5773502692	1.0000000000
3	0.7745966692	0.5555555556
	0.0000000000	0.8888888889
	−0.7745966692	0.5555555556
4	0.8611363116	0.3478548451
	0.3399810436	0.6521451549
	−0.3399810436	0.6521451549
	−0.8611363116	0.3478548451
5	0.9061798459	0.2369268850
	0.5384693101	0.4786286705
	0.0000000000	0.5688888889
	−0.5384693101	0.4786286705
	−0.9061798459	0.2369268850

مثال 1 قرّب $\int_{-1}^{1} e^x \cos x\,dx$ باستخدام صيغة تكامل جاوس بأخذ $n = 3$.

من جدول (11.4) نحصل على

$$\int_{-1}^{1} e^x \cos x\,dx \approx 0.\bar{5}e^{0.774596692}\cos 0.774596692$$
$$+ 0.\bar{8}\cos 0 + 0.\bar{5}e^{-0.774596692}\cos(-0.774596692)$$
$$= 1.9333904$$

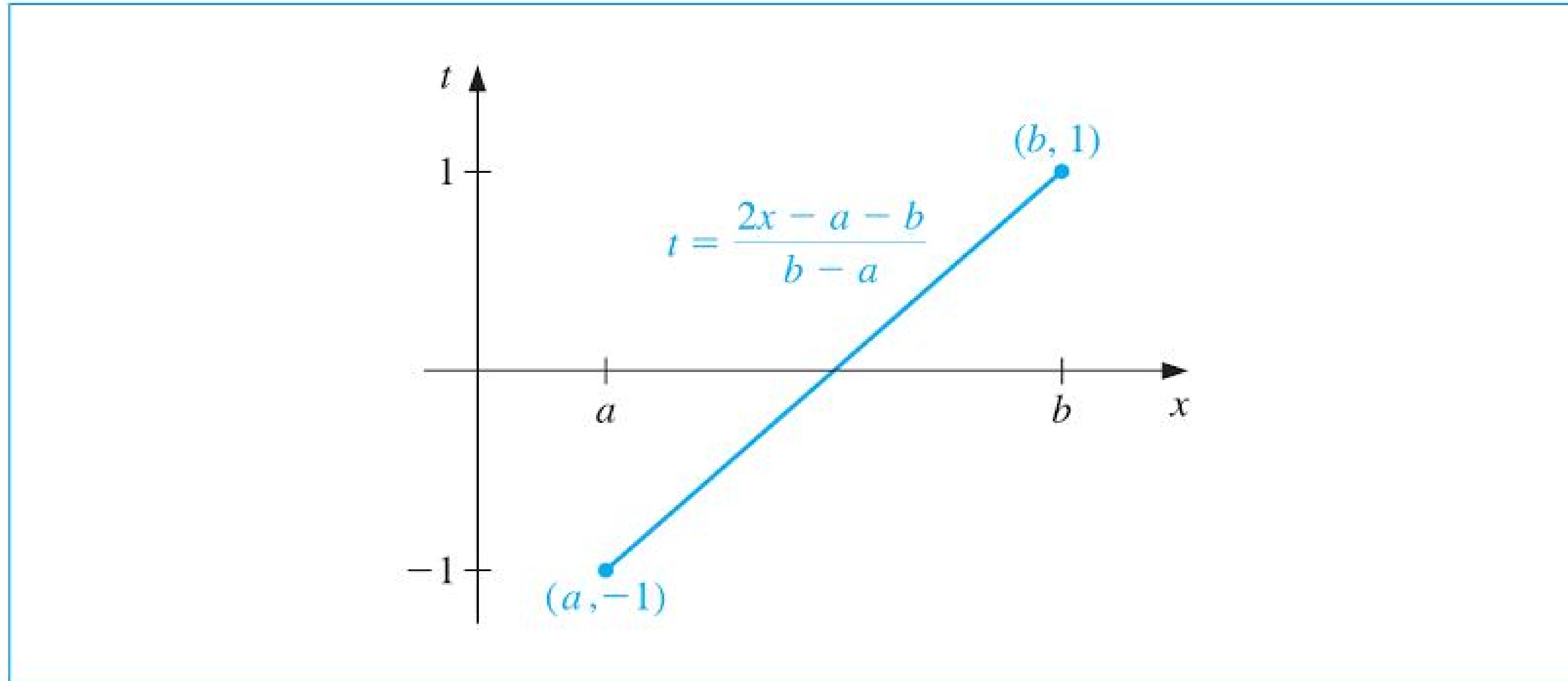
يمكن إيجاد القيمة الحقيقية باستخدام التكامل بالأجزاء لتكون 1.9334214، وبذلك يكون الخطأ المطلق أقل من 3.2×10^{-5}.

إن التكامل $\int_a^b f(x)\,dx$ على أي فترة $[a, b]$ يمكن تحويله إلى تكامل على الفترة $[-1, 1]$ باستخدام تحويل المتغيرات. (انظر شكل 16.4)

$$t = \frac{2x - a - b}{b - a} \Longleftrightarrow x = \frac{1}{2}[(b - a)t + a + b]$$

يسمح هذا بتطبيق صيغة تكامل جاوس على أي فترة $[a, b]$؛ لأن

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_{-1}^{1} f\left(\frac{(b-a)t + (b+a)}{2}\right)\frac{(b-a)}{2}\,dt \qquad (42.4)$$



شكل 16.4

مثال 2 لديك مسألة لإيجاد تقريبات للتكامل $\int_1^{1.5} e^{-x^2}\,dx$.

يعطي جدول (12.4) القيم لصيغ نيوتن – كوتس المعطاة في الفصل (3.4). إن القيمة الصحيحة للتكامل إلى أقرب سبع خانات عشرية هي 0.1093643.

جدول 12.4

n	0	1	2	3	4
المعادلات المغلقة		0.1183197	0.1093104	0.1093404	0.1093643
المعادلات المفتوحة	0.1048057	0.1063473	0.1094116	0.1093971	

إن تطبيق عملية جاوس على هذه المسألة يتطلب أولاً تحويل التكامل إلى مسألة فيها فترة التكامل $[-1, 1]$.

باستخدام الصيغة (42.4) نجد أن

$$\int_1^{1.5} e^{-x^2}\,dx = \frac{1}{4}\int_{-1}^{1} e^{(-(t+5)^2/16)}\,dt$$

إن القيم في جدول (11.4) تعطي تقريبات تكامل جاوس لهذه المسألة

$n = 2$:

$$\int_1^{1.5} e^{-x^2}\,dx \approx \frac{1}{4}[e^{-(5+0.5773502692)^2/16} + e^{-(5-0.5773502692)^2/16}] = 0.1094003$$

$n = 3$:

$$\int_1^{1.5} e^{-x^2}\,dx \approx \frac{1}{4}[(0.5555555556)e^{-(5+0.7745966692)^2/16} + (0.8888888889)e^{-(5)^2/16}$$
$$+ (0.5555555556)e^{-(5-0.7745966692)^2/16}]$$
$$= 0.1093642$$

وللمقارنة الإضافية؛ نعرض القيم التي حصلنا عليها باستخدام عملية رومبرج بأخذ $n = 4$ في جدول (13.4). ■

جدول 13.4

0.1183197			
0.1115627	0.1093104		
0.1099114	0.1093610	0.1093643	
0.1095009	0.1093641	0.1093643	0.1093643

مجموعة التمارين 7.4 EXERCISE SET

1. أوجد تقريب التكاملات الآتية باستخدام طريقة جاوس و $n = 2$، ثم قارن نتائجك بالقيم الصحيحة للتكاملات:

أ. $\int_1^{1.5} x^2 \ln x \, dx$ ب. $\int_0^1 x^2 e^{-x} \, dx$ جـ. $\int_0^{0.35} \frac{2}{x^2 - 4} \, dx$ د. $\int_0^{\pi/4} x^2 \sin x \, dx$

هـ. $\int_0^{\pi/4} e^{3x} \sin 2x \, dx$ و. $\int_1^{1.6} \frac{2x}{x^2 - 4} \, dx$ ز. $\int_3^{3.5} \frac{x}{\sqrt{x^2 - 4}} \, dx$ حـ. $\int_0^{\pi/4} (\cos x)^2 \, dx$

2. كرر التمرين (1) بأخذ $n = 3$.
3. كرر التمرين (1) بأخذ $n = 4$.
4. كرر التمرين (1) بأخذ $n = 5$.
5. حدِّد الثوابت a ، b ، c و d التي تعطي صيغة التكامل
$$\int_{-1}^{1} f(x)\, dx = af(-1) + bf(1) + cf'(-1) + df'(1)$$
التي رتبة الدقة فيها 3.
6. حدِّد الثوابت a ، b ، c و d التي تعطي صيغة التكامل
$$\int_{-1}^{1} f(x)\, dx = af(-1) + bf(0) + cf(1) + df'(-1) + ef'(1)$$
التي رتبة الدقة فيها 4.
7. تحقق من القيم في جدول (11.4) المقابلة للقيم $n = 2،3$، بإيجاد الجذور لكثيرات حدود ليجندر المناسبة. استخدم الصيغ المذكورة قبل هذا جدول لإيجاد المعاملات المرتبطة بهذه القيم.
8. برهن أنه لا يمكن في الصيغة $Q(P) = \sum_{i=1}^{n} c_i P(x_i)$ أن تكون رتبة دقتها أكثر من $2n - 1$ مهما كان اختيار $c_1, \ldots, c_n$ و $x_1, \ldots, x_n$.
[إضاءة: أنشئ كثيرة حدود ذات جذر مضاعف على كل x_i].

8.4 التكاملات المتعددة Multiple Integrals

يمكن تطوير الطرائق التي قدمت في البنود السابقة مباشرة لاستخدامها في إيجاد تقريب للتكاملات المتعددة. خذ التكامل الثنائي
$$\iint_R f(x, y)\, dA$$





ويعطي حد الخطأ E على الصيغة

$$E = \frac{-k(b-a)h^4}{540}\left[\frac{\partial^4 f(\xi_0, y_0)}{\partial x^4} + 2\sum_{j=1}^{(m/2)-1}\frac{\partial^4 f(\xi_{2j}, y_{2j})}{\partial x^4} + 4\sum_{j=1}^{m/2}\frac{\partial^4 f(\xi_{2j-1}, y_{2j-1})}{\partial x^4} + \frac{\partial^4 f(\xi_m, y_m)}{\partial x^4}\right] - \frac{(d-c)k^4}{180}\int_a^b \frac{\partial^4 f(x, \mu)}{\partial y^4}\,dx$$

إذا كان $\partial^4 f/\partial x^4$ متصلاً، يمكن تطبيق مبرهنة القيمة الوسطية على نحو متكرر لبرهنة أنه يمكن الاستعاضة عن تقييم المشتقات الجزئية بالنسبة إلى x بقيمة مشتركة، وأن

$$E = \frac{-k(b-a)h^4}{540}\left[3m\frac{\partial^4 f}{\partial x^4}(\bar{\eta}, \bar{\mu})\right] - \frac{(d-c)k^4}{180}\int_a^b \frac{\partial^4 f(x, \mu)}{\partial y^4}\,dx$$

لنقطة ما $(\bar{\eta}, \bar{\mu})$ في R.

وأيضًا إذا كان $\partial^4 f/\partial y^4$ متصلاً فإن مبرهنة القيمة الوسطية الموزونة للتكاملات تعطي

$$\int_a^b \frac{\partial^4 f(x, \mu)}{\partial y^4}\,dx = (b-a)\frac{\partial^4 f}{\partial y^4}(\hat{\eta}, \hat{\mu})$$

لنقطة ما $(\hat{\eta}, \hat{\mu})$ في R.

بما أن $m = (d-c)/k$ فإن حد الخطأ له الصيغة

$$E = \frac{-k(b-a)h^4}{540}\left[3m\frac{\partial^4 f}{\partial x^4}(\bar{\eta}, \bar{\mu})\right] - \frac{(d-c)(b-a)}{180}k^4\frac{\partial^4 f}{\partial y^4}(\hat{\eta}, \hat{\mu})$$

أو

$$E = -\frac{(d-c)(b-a)}{180}\left[h^4\frac{\partial^4 f}{\partial x^4}(\bar{\eta}, \bar{\mu}) + k^4\frac{\partial^4 f}{\partial y^4}(\hat{\eta}, \hat{\mu})\right]$$

للنقطتين $(\bar{\eta}, \bar{\mu})$ و $(\hat{\eta}, \hat{\mu})$ في R.

مثال 1 إن تطبيق قاعدة سمبسون المركبة لتقريب التكامل

$$\int_{1.4}^{2.0}\int_{1.0}^{1.5} \ln(x+2y)\,dy\,dx$$

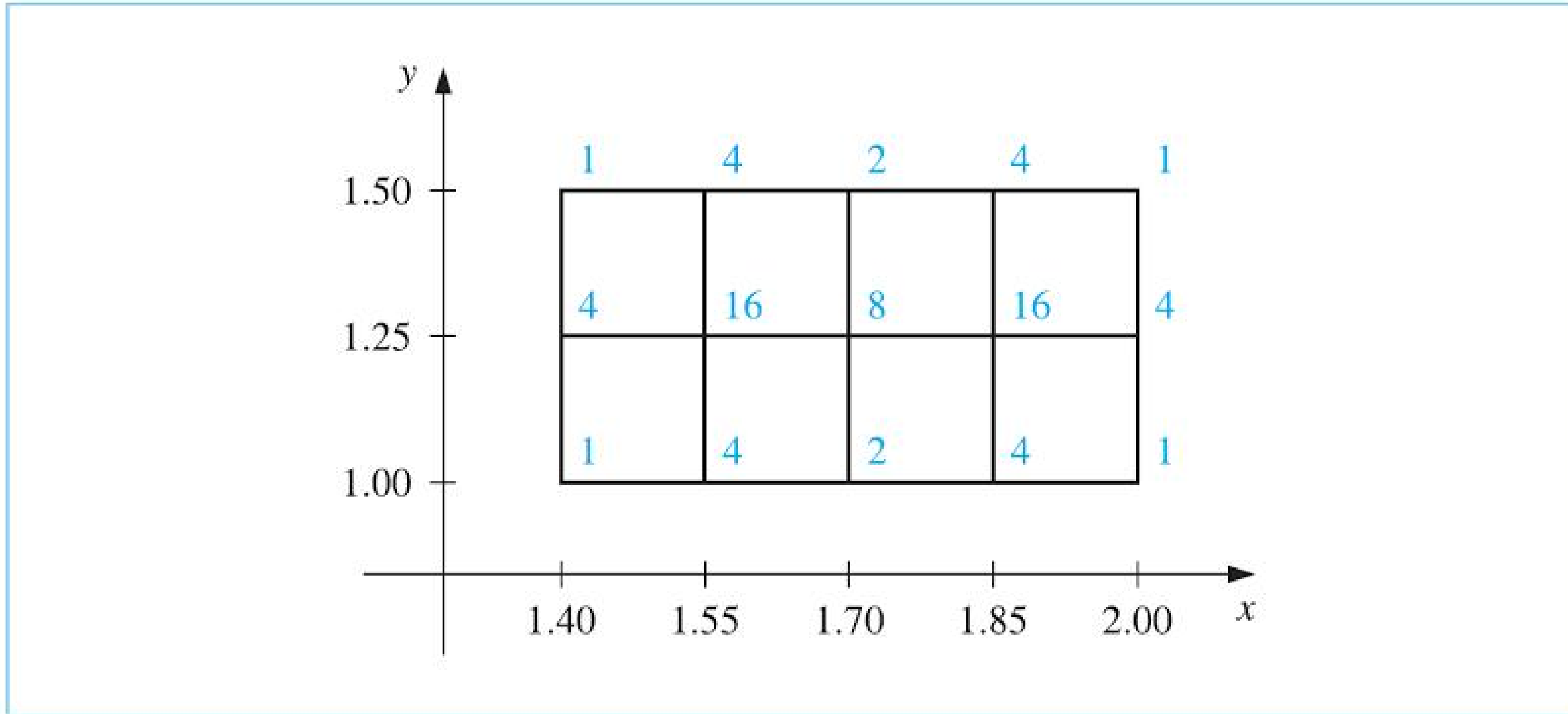
بأخذ $n = 4$ و $m = 2$ يستخدم حجوم الخطوة $k = 0.25$ و $h = 0.15$.
في شكل (18.4) تظهر منطقة التكامل R مع نقاط النقاط (x_i, y_j)، حيث $i = 0, 1, 2, 3, 4$ و $j = 0, 1, 2$. وتظهر أيضًا المعاملات $w_{i,j}$ للدالّة $f(x_i, y_i) = \ln(x_i + 2y_i)$ في حاصل الجمع الذي يعطي تقريب قاعدة سمبسون المركبة للتكامل.

التقريب هو

$$\int_{1.4}^{2.0}\int_{1.0}^{1.5} \ln(x+2y)\,dy\,dx \approx \frac{(0.15)(0.25)}{9}\sum_{i=0}^{4}\sum_{j=0}^{2} w_{i,j}\ln(x_i + 2y_j)$$

$$= 0.4295524387$$

شكل 18.4



بما أن

$$\frac{\partial^4 f}{\partial x^4}(x, y) = \frac{-6}{(x+2y)^4} \quad \text{و} \quad \frac{\partial^4 f}{\partial y^4}(x, y) = \frac{-96}{(x+2y)^4}$$

والقيم العظمى للقيم المطلقة لهذه المشتقات الجزئية تتحقق على R عندما $x = 1.4$ و $y = 1.0$ فإن الخطأ يكون محدودًا بـ

$$|E| \leq \frac{(0.5)(0.6)}{180}\left[(0.15)^4 \max_{(x,y)\text{ in } R} \frac{6}{(x+2y)^4} + (0.25)^4 \max_{(x,y)\text{ in } R} \frac{96}{(x+2y)^4}\right]$$
$$\leq 4.72 \times 10^{-6}$$

إن القيمة الفعلية للتكامل إلى أقرب عشر خانات عشرية هي

$$\int_{1.4}^{2.0} \int_{1.0}^{1.5} \ln(x+2y)\, dy\, dx = 0.4295545265$$

ولذلك فإن التقريب دقيق ضمن 2.1×10^{-6}. ■

يمكن استخدام الطرائق نفسها لتقريب التكامل الثلاثي والتكاملات الأعلى للدوال في أكثر من ثلاثة متغيرات. وإن العدد التام للتقييمات الدالّية المطلوبة للتقريب هو حاصل ضرب أعداد التقييمات الدالّية المطلوبة عندما تطبّق الطريقة على كل متغير.

ولتخفيض عدد التقييمات الدالّية؛ يمكن استخدام طرائق أكثر فاعلية من صيغ نيوتن – كوتس، ومن هذه الطرائق: صيغة جاوس للتكامل، تكامل رومبرج، أو صيغ التكامل التكيفية. يبين المثال الآتي استخدام طريقة جاوس للتكامل الذي عايناه في المثال (1).

مثال 2

لديك التكامل الثنائي الذي ذكر في المثال (1).

قبل استخدام طريقة جاوس للتكامل لإيجاد تقريب لهذا التكامل نجري تحويلًا لمنطقة التكامل

$$R = \{(x, y) \mid 1.4 \leq x \leq 2.0,\ 1.0 \leq y \leq 1.5\}$$

إلى

$$\hat{R} = \{ (u, \mathrm{v}) \mid -1 \le u \le 1, -1 \le \mathrm{v} \le 1 \}$$

والتحويلات الخطية التي تنجز هذا التحويل هي

$$\mathrm{v} = \frac{1}{1.5 - 1.0}(2y - 1.0 - 1.5), \quad \text{و} \quad u = \frac{1}{2.0 - 1.4}(2x - 1.4 - 2.0)$$

أو على نحو مكافئ $x = 0.3u + 1.7$ و $y = 0.25\mathrm{v} + 1.25$.

يمكن باستخدام هذا التحويل للمتغيرات الذي يعطي تكاملًا أن نطبق عليه قاعدة جاوس

$$\int_{1.4}^{2.0} \int_{1.0}^{1.5} \ln(x + 2y)\, dy\, dx = 0.075 \int_{-1}^{1} \int_{-1}^{1} \ln(0.3u + 0.5\mathrm{v} + 4.2)\, d\mathrm{v}\, du$$

إن صيغة جاوس للتكامل باستخدام $n = 3$ في كلٍّ من u و v تتطلب منا استخدام النقاط $u_0 = \mathrm{v}_0 = r_{3,1} = -0.7745966692$ و $u_1 = \mathrm{v}_1 = r_{3,2} = 0$ و $u_2 = \mathrm{v}_2 = r_{3,3} = 0.7745966692$ والأوزان المرتبطة بهذا هي $c_{3,2} = 0.\overline{8}$ و $c_{3,1} = c_{3,3} = 0.\overline{5}$ (هذه القيم موجودة في جدول 11.4) وبذلك

$$\int_{1.4}^{2.0} \int_{1.0}^{1.5} \ln(x + 2y)\, dy\, dx \approx 0.075 \sum_{i=1}^{3} \sum_{j=1}^{3} c_{3,i} c_{3,j} \ln(0.3 r_{3,i} + 0.5 r_{3,j} + 4.2)$$

$$= 0.4295545313$$

على الرغم من أن هذه النتيجة تتطلب (9) تقييمات دالية فقط مقارنة بـ 15 في قاعدة سمبسون المركبة المستخدمة في المثال (1)، إلا أن النتيجة دقيقة ضمن 4.8×10^{-9} مقارنة بالدقة 2.1×10^{-6} في المثال (1). ■

إن طرائق التقريبات للتكاملات الثنائية ليست مقصورة على التكاملات ذات مناطق التكامل المستطيلة. يمكن تطوير الطرائق التي شرِحت سابقًا لتستخدم في تقريب التكاملات الثنائية على الصيغ

$$\int_{a}^{b} \int_{c(x)}^{d(x)} f(x, y)\, dy\, dx \tag{43.4}$$

أو

$$\int_{c}^{d} \int_{a(y)}^{b(y)} f(x, y)\, dx\, dy. \tag{44.4}$$

في الحقيقة، يمكننا أيضًا تقريب التكاملات على المناطق من غير هذا النوع عن طريق تجزئات مناسبة للمنطقة. (انظر تمرين 10)

لوصف الطريقة المستخدمة في تقريب التكامل من النوع

$$\int_a^b \int_{c(x)}^{d(x)} f(x, y)\, dy\, dx$$

سنستخدم قاعدة سمبسون الرئيسة للتكامل بالنسبة إلى كلا المتغيرين.

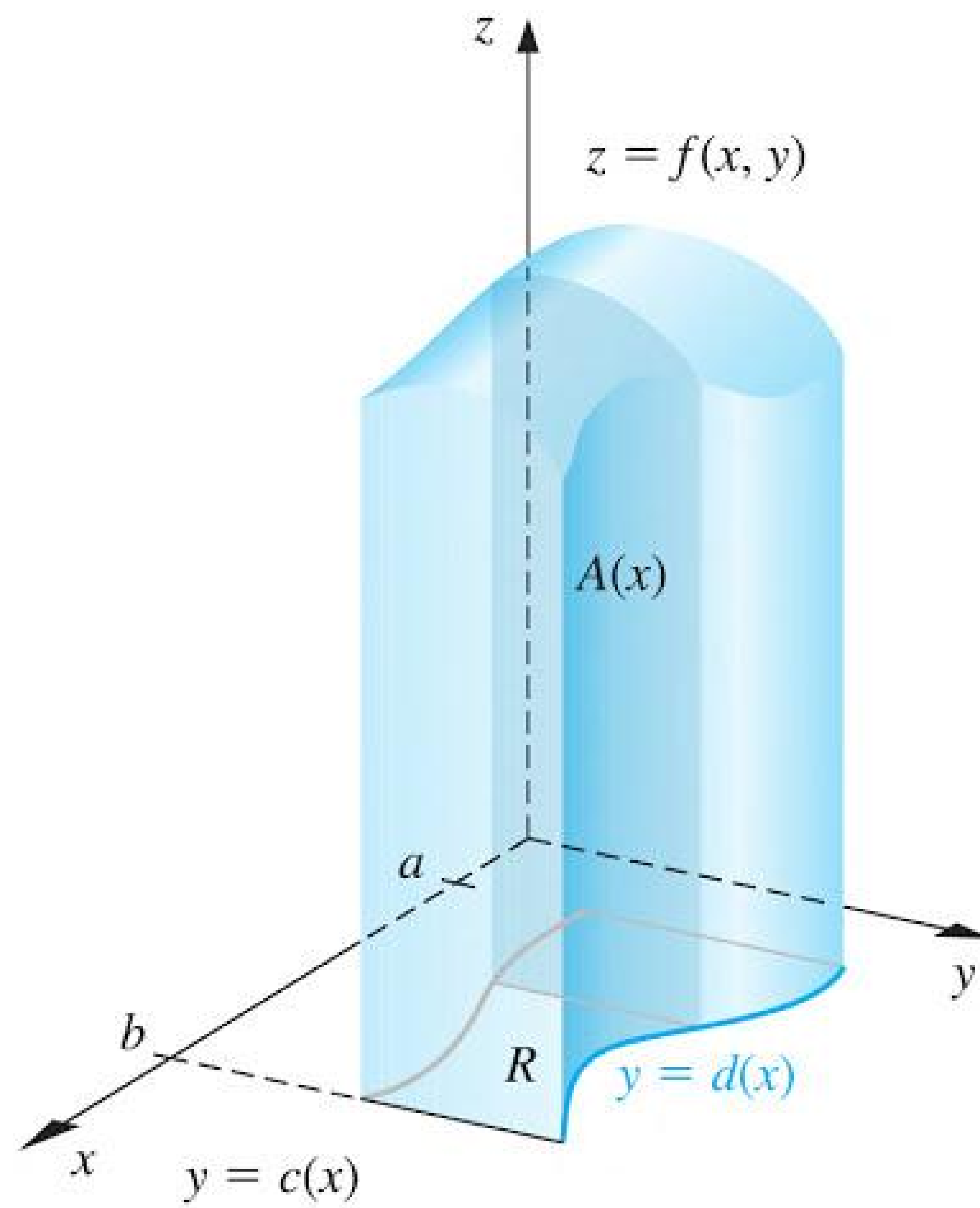
حجم الخطوة للمتغير x هو $h = (b - a)/2$، ولكن حجم الخطوة بالنسبة إلى المتغير y يتغير مع تغير x، (انظر شكل 19.4) ويكتب على الصيغة

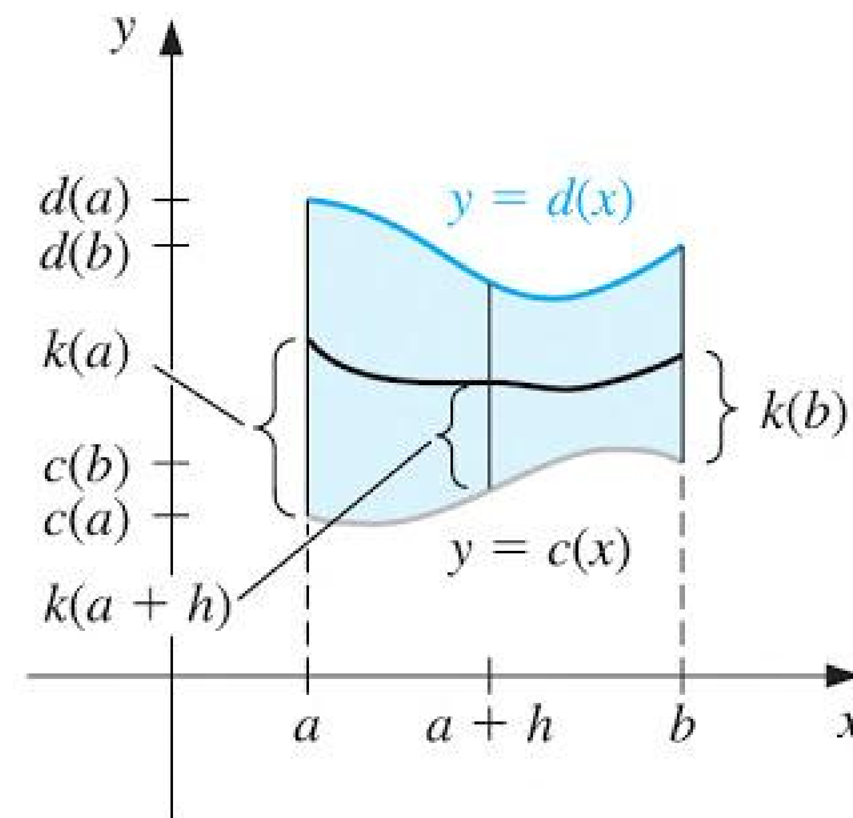
$$k(x) = \frac{d(x) - c(x)}{2}$$

ومن ثم

$$\begin{aligned}
\int_a^b \int_{c(x)}^{d(x)} f(x, y)\, dy\, dx &\approx \int_a^b \frac{k(x)}{3}[f(x, c(x)) + 4f(x, c(x) + k(x)) + f(x, d(x))]\, dx \\
&\approx \frac{h}{3}\Bigg\{ \frac{k(a)}{3}[f(a, c(a)) + 4f(a, c(a) + k(a)) + f(a, d(a))] \\
&\quad + \frac{4k(a+h)}{3}[f(a+h, c(a+h)) + 4f(a+h, c(a+h) \\
&\quad + k(a+h)) + f(a+h, d(a+h))] \\
&\quad + \frac{k(b)}{3}[f(b, c(b)) + 4f(b, c(b) + k(b)) + f(b, d(b))]\Bigg\}
\end{aligned}$$

شكل 19.4























$$P_4(x) = g(a) + g'(a)(x-a) + \frac{g''(a)}{2!}(x-a)^2 + \frac{g'''(a)}{3!}(x-a)^3 + \frac{g^{(4)}(a)}{4!}(x-a)^4$$

ونكتب

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b \frac{g(x) - P_4(x)}{(x-a)^p}\,dx + \int_a^b \frac{P_4(x)}{(x-a)^p}\,dx \qquad (45.4)$$

وبما أن $P(x)$ كثيرة حدود، فإنه يمكننا أن نحدد بالضبط قيمة

$$\int_a^b \frac{P_4(x)}{(x-a)^p}\,dx = \sum_{k=0}^{4}\int_a^b \frac{g^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^{k-p}\,dx = \sum_{k=0}^{4}\frac{g^{(k)}(a)}{k!(k+1-p)}(b-a)^{k+1-p}$$
(46.4)

إن هذا هو الجزء المسيطر في التقريب، وخصوصًا عندما تتفق كثيرة حدود تايلور$P_4(x)$ مع $g(x)$ على نحو كبير على كل الفترة $[a, b]$.

ولتقريب تكامل f؛ يجب أن نضيف هذه القيمة لتقريب التكامل

$$\int_a^b \frac{g(x) - P_4(x)}{(x-a)^p}\,dx$$

ولتحديد هذا؛ نعرّف أولا

$$G(x) = \begin{cases} \dfrac{g(x) - P_4(x)}{(x-a)^p} & a < x \le b \text{ إذا كان} \\ 0 & x = a \text{ إذا كان} \end{cases}$$

بما أن $0 < p < 1$ و $P_4^{(k)}(a)$ يتفق مع $g^{(k)}(a)$ لكل $k = 0, 1, 2, 3, 4$، نحصل على $G \in C^4[a, b]$ هذا يعني إمكانية تطبيق قاعدة سمبسون المركبة لتقريب تكامل G على $[a, b]$. إن جمع هذا التقريب إلى القيمة في الصيغة (46.4) يعطي التقريب للتكامل المعتل للدالّة f على $[a, b]$، ضمن دقة التقريب بقاعدة سمبسون المركبة.

مثال 1 سنستخدم قاعدة سمبسون المركبة بأخذ $h = 0.25$ لتقريب قيمة التكامل المعتل

$$\int_0^1 \frac{e^x}{\sqrt{x}}\,dx$$

بما أن كثيرة حدود تايلور الرابعة للدالّة e^x حول $x = 0$ هو

$$P_4(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24}$$

فإن جزءًا من التقريب للتكامل $\int_0^1 (e^x/\sqrt{x})\,dx$ يكون

$$\int_0^1 \frac{P_4(x)}{\sqrt{x}}\,dx = \int_0^1 \left(x^{-1/2} + x^{1/2} + \frac{1}{2}x^{3/2} + \frac{1}{6}x^{5/2} + \frac{1}{24}x^{7/2}\right)dx$$

$$= \lim_{M\to 0^+}\left[2x^{1/2} + \frac{2}{3}x^{3/2} + \frac{1}{5}x^{5/2} + \frac{1}{21}x^{7/2} + \frac{1}{108}x^{9/2}\right]_M^1$$

$$= 2 + \frac{2}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{21} + \frac{1}{108} \approx 2.9235450$$

ولإيجاد الجزء الآخر لتقريب التكامل $\int_0^1 (e^x/\sqrt{x})\,dx$ نحتاج إلى تقريب $\int_0^1 G(x)\,dx$، حيث

$$G(x) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{x}}(e^x - P_4(x)) & \text{إذا كان } 0 < x \le 1 \\ 0 & \text{إذا كان } x = 0 \end{cases}$$

ويعرض جدول (14.4) القيم اللازمة لتطبيق قاعدة سمبسون المركبة لهذا التقريب.

جدول 14.4

x	$G(x)$
0.00	0
0.25	0.0000170
0.50	0.0004013
0.75	0.0026026
1.00	0.0099485

إن استخدام هذه البيانات وقاعدة سمبسون المركبة يعطي

$$\int_0^1 G(x)\,dx \approx \frac{0.25}{3}[0 + 4(0.0000170) + 2(0.0004013) + 4(0.0026026) + 0.0099485]$$
$$= 0.0017691$$

ولذلك ينتج

$$\int_0^1 \frac{e^x}{\sqrt{x}}\,dx \approx 2.9235450 + 0.0017691 = 2.9253141$$

إن هذه النتيجة دقيقة ضمن دقة قاعدة سمبسون المركبة في التقريب للدالّة G.

بما أن $|G^{(4)}(x)| < 1$ على $[0, 1]$، فإن الخطأ يكون محدودًا بالعدد

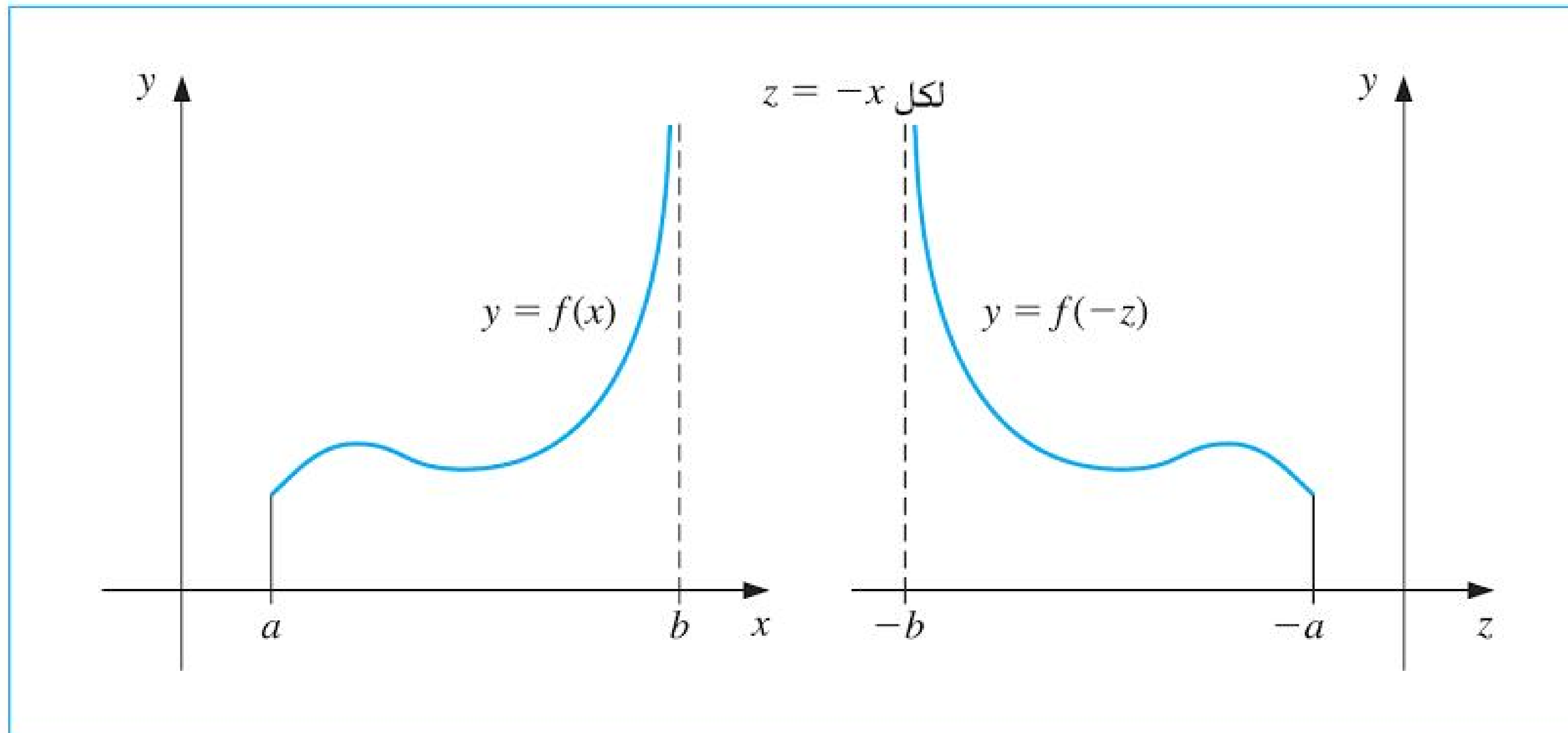
$$\frac{1-0}{180}(0.25)^4 = 0.0000217$$ ■

لتقريب التكامل المعتل بنقطة شاذة على نقطة النهاية اليمنى؛ نطبق الطريقة التي استخدمناها سابقًا، ولكن نتوسع بدلالة نقطة النهاية اليمنى b بدلًا من نقطة النهاية اليسرى a. وبدلًا من ذلك نستخدم التعويض $z = -x,\ dz = -dx$ لتغيير التكامل المعتل على الصيغة

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_{-b}^{-a} f(-z)\,dz \tag{47.4}$$

الذي له نقطة شاذة على نقطة النهاية اليسرى. (انظر شكل 24.4)

شكل 24.4



يعامل شكل المعتل الذي له نقطة شاذة على c بحيث تُعدّ $a < c < b$ مجموعة لتكاملين معتلين ذات نقاط شاذة على نقاط النهاية؛ لأن

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$$

ويحتوي النوع الآخر من التكاملات المعتلة على نهايات تكامل لانهائية. يكون التكامل الأساس من هذا النوع على الصيغة

$$\int_a^\infty \frac{1}{x^p}\,dx$$

للعدد $p > 1$. ويمكن تحويل هذا إلى تكامل بنقطة شاذة يسرى على 0 باستخدام التعويض التكاملي

$$t = x^{-1}, \qquad dt = -\,x^{-2}\,dx$$

لذلك

$$dx = -\,x^2\,dt = -\,t^{-2}\,dt$$

ومن ثم

$$\int_a^\infty \frac{1}{x^p}\,dx = \int_{1/a}^0 -\frac{t^p}{t^2}\,dt = \int_0^{1/a} \frac{1}{t^{2-p}}\,dt$$

وبطريقة مماثلة، فإن تحويل المتغير $t = x^{-1}$ يغير التكامل المعتل $\int_a^\infty f(x)\,dx$ إلى تكامل ذي نقطة شاذة على النهاية اليسرى هي الصفر

$$\int_a^\infty f(x)\,dx = \int_0^{1/a} t^{-2} f\left(\frac{1}{t}\right)\,dt \qquad (48.4)$$

والآن يمكن تقريب هذا التكامل باستخدام صيغة تكامل من النوع الذي نوقِش سابقًا.

مثال 2 لتقريب قيمة التكامل المعتل

$$I = \int_1^\infty x^{-3/2} \sin\frac{1}{x}\,dx$$

نستخدم تحويل المتغير $t = x^{-1}$.

بما أن $dt = -\,x^{-2}\,dx$ فسنحصل على $dx = -\,x^2\,dt = -\,\frac{1}{t^2}\,dt$

و

$$I = \int_{x=1}^{x=\infty} x^{-3/2} \sin\frac{1}{x}\,dx = \int_{t=1}^{t=0} \left(\frac{1}{t}\right)^{-3/2} \sin t \left(-\frac{1}{t^2}\,dt\right) = \int_0^1 t^{-1/2} \sin t\,dt$$

إن كثيرة حدود تايلور الرابعة $P_4(t)$ للدالّة $\sin t$ حول 0 هو $P_4(t) = t - \frac{1}{6}t^3$، ولذلك

$$G(t) = \begin{cases} \dfrac{\sin t - t + \frac{1}{6}t^3}{t^{1/2}} & 0 < t \le 1 \text{ إذا كان } \\ 0 & t = 0 \text{ إذا كان } \end{cases}$$

يكون في $C^4[0, 1]$























جيدة العرض؟

أ. $f(t, y) = e^{t-y}$ ب. $f(t, y) = \dfrac{1+y}{1+t}$ ج. $f(t, y) = \cos(yt)$ د. $f(t, y) = \dfrac{y^2}{1+t}$

5. لكلٍّ من مسائل القيمة الابتدائية الآتية، أثبت أن المعادلة المعطاة تتضمن حلًّا. قرّب إلى $y(2)$ مستخدمًا طريقة نيوتن.

أ. $y^3t + yt = 2$; $y(1) = 1$; $1 \le t \le 2$, $y' = -\dfrac{y^3 + y}{(3y^2+1)t}$,

ب. $y\sin t + t^2e^y + 2y = 1$; $y(1) = 0$; $1 \le t \le 2$, $y' = -\dfrac{y\cos t + 2te^y}{\sin t + t^2e^y + 2}$,

6. برهن المبرهنة (3.5) من خلال تطبيق مبرهنة القيمة الوسطية لـ $f(t, y)$، مبقيًا t ثابتًا.

7. في الثابتين a و b، أثبت أن المجموعة $D = \{(t, y) \mid a \le t \le b, -\infty < y < \infty\}$ محدبة.

8. افترض الاضطراب $\delta(t)$ نسبيًّا إلى t، بمعنى أن $\delta(t) = \delta t$ ثابت ما δ. أثبت مباشرةً أن مسائل القيمة الابتدائية الآتية جيدة العرض:

أ. $y' = 1 - y, \quad 0 \le t \le 2, \quad y(0) = 0$

ب. $y' = t + y, \quad 0 \le t \le 2, \quad y(0) = -1$

ج. $y' = \dfrac{2}{t}y + t^2e^t, \quad 1 \le t \le 2, \quad y(1) = 0$

د. $y' = -\dfrac{2}{t}y + t^2e^t, \quad 1 \le t \le 2, \quad y(1) = \sqrt{2}e$

9. طريقة بيكارد لحل مسألة القيمة الابتدائية

$$y' = f(t, y) \qquad a \le t \le b \qquad y(a) = \alpha$$

يكون وفقًا للشرح الآتي: ليكن $y_0(t) = \alpha$ لكل t ضمن $[a, b]$. عرف متتالية الدّوال $\{y_k(t)\}$

$$y_k(t) = \alpha + \int_a^t f(\tau, y_{k-1}(\tau))\, d\tau \qquad k = 1, 2, \ldots .$$

أ. اعمل التكامل $y' = f(t, y(t))$، واستخدم الشرط الابتدائي لاشتقاق طريقة بيكارد.

ب. اعمل التوليد $y_0(t), y_1(t), y_2(t)$ و $y_3(t)$ لمسألة القيمة الابتدائية

$$y' = -y + t + 1 \qquad 0 \le t \le 1 \qquad y(0) = 1$$

ج. قارن التمهيدية في الفقرة (ب) مع سلسلة ماكلورين للحل الحقيقي $y(t) = t + e^{-t}$.

2.5 طريقة أويلر Euler's Method

على الرغم من قلة استخدام طريقة أويلر، إلا أنه لبساطة اشتقاقها يمكن توظيفها في توضيح الأساليب المستخدمة في إنشاء بعض الأساليب الأكثر تعقيدًا، دون اللجوء إلى التعقيدات الجبرية المرافقة لعملية الإنشاء هذه.

وتهدف طريقة أويلر إلى إيجاد تقريب لمسألة القيمة الابتدائية ذات العرض الجيد

$$\frac{dy}{dt} = f(t, y)\ , \quad a \le t \le b\ , \quad y(a) = \alpha \qquad (6.5)$$

في الحقيقة، إن تقريبًا متصلًا للحل $y(t)$ لن يظهر، وبدلًا من ذلك فإن تقريبات إلى y ستتولد عند قيم مختلفة تدعى نقاط ميش (نقاطًا متناغمة) mesh points في الفترة $[a, b]$. وبمجرد إيجاد الحل التقريبي عند النقاط، فإنه يمكن إيجاد الحل التقريبي عند النقاط الأخرى في الفترة من خلال الاستكمال الداخلي.

في البداية نشترط توزع النقاط المتناغمة بالتساوي في الفترة $[a, b]$، وهذا الشرط مضمون من خلال اختيار عدد صحيح موجب N واختيار النقاط المتناغمة mesh points لكلٍّ من

$$t_i = a + ih \quad \text{لكل} \quad i = 0, 1, 2, \ldots, N$$

المسافة الموحدة ما بين النقاط $h = (b - a)/N = t_{i+1} - t_i$ تسمى سعة الخطوة step size.

يُعد ليونارد أويلر (1707 – 1783) Leonhard Euler من أكثر المبدعين الرياضيين، وكان أول من عرض للمجتمع الرياضي استخدام طرق الفرق الابتدائي لتقريب حل المعادلات التفاضلية.

سنستخدم مبرهنة تايلور لاشتقاق طريقة أويلر. افترض أن $y(t)$ الحل الوحيد للمعادلة (6.5) له مشتقتان متصلتان على $[a, b]$، من ثم فإنه لكلٍّ من $i = 0, 1, 2, \ldots, N - 1$

$$y(t_{i+1}) = y(t_i) + (t_{i+1} - t_i)y'(t_i) + \frac{(t_{i+1} - t_i)^2}{2}y''(\xi_i)$$

لعددٍ ما ξ_i ضمن (t_i, t_{i+1}). وحيث $h = t_{i+1} - t_i$ يكون لدينا

$$y(t_{i+1}) = y(t_i) + hy'(t_i) + \frac{h^2}{2}y''(\xi_i)$$

ولأن $y(t)$ يحقق المعادلة التفاضلية (6.5)؛ فإن

$$y(t_{i+1}) = y(t_i) + hf(t_i, y(t_i)) + \frac{h^2}{2}y''(\xi_i) \tag{7.5}$$

طريقة أويلر تبني $w_i \approx y(t_i)$ لكلٍّ من $i = 1, 2, \ldots, N$ ومن خلال حذف الجزء المتبقي فإن طريقة أويلر تكون

$$w_0 = \alpha,$$

$$w_{i+1} = w_i + hf(t_i, w_i) \quad \text{لكل} \quad i = 0, 1, \ldots, N - 1 \tag{8.5}$$

تسمى المعادلة (8.5) بمعادلة الفرق difference equation وهي مرافقة لطريقة أويلر. كذلك وكما سنرى مؤخرًا في هذا الفصل، فإن المبرهنة وحل معادلات الفرق توازي –بجوانب عدة– المبرهنة وحل المعادلات التفاضلية. تنفذ الخوارزمية (5.1) طريقة أويلر.

ALGORITHM
الخوارزمية
1.5

طريقة أويلر Euler's Method

لتقريب حل مسألة القيمة الابتدائية

$$y' = f(t, y), \quad a \le t \le b, \quad y(a) = \alpha$$

عند $(N + 1)$ من الكرّاد متساوية التباعد في الفترة $[a, b]$:

المدخلات: نقاط نهاية a و b، عدد صحيح N، شرط ابتدائي α.

المخرجات: التقريب w إلى y عند $(N + 1)$ من القيم لـ t.

الخطوة	المضمون
1	ضع $h = (b - a)/N$



	$t = a$ $w = \alpha$ المخرجات (t, w).
2	لكلٍّ من $i = 1, 2, \ldots, N$ طبق الخطوتين 3 و4.
3	ضع $w = w + hf(t, w)$ (احسب w_i). $t = a + ih$ (احسب t_i).
4	المخرجات (t, w).
5	توقف.

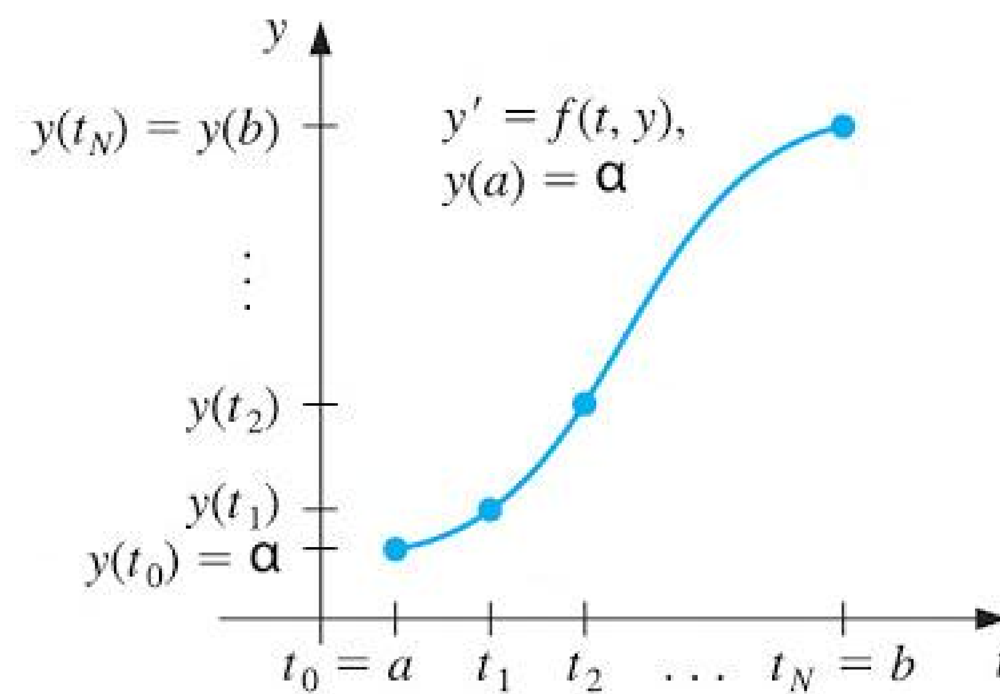
■

ولتفسير طريقة أويلر هندسيًّا؛ انظر أنه عندما يكون التقريب w_i قريبًا من $y(t_i)$، فإن افتُرِض كون المسألة جيدة العرض يؤدي إلى

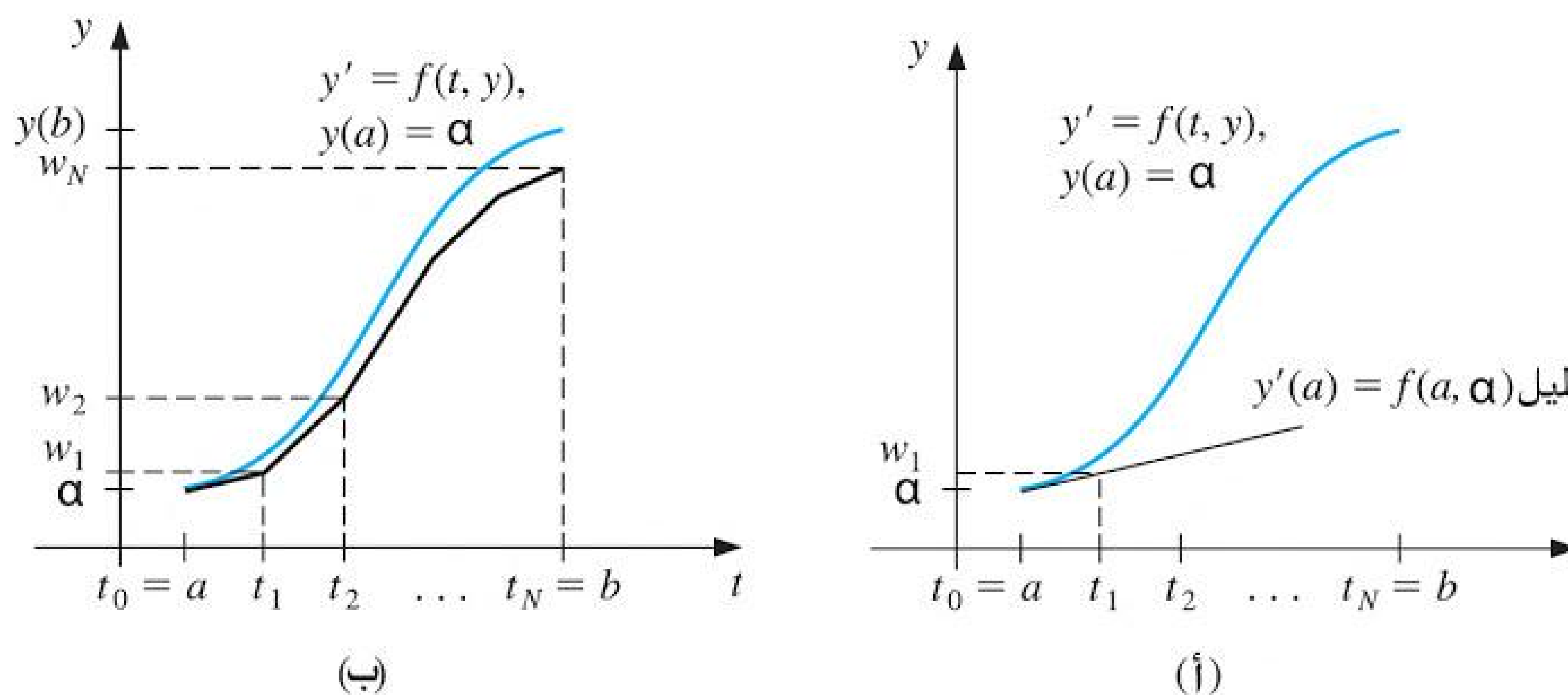
$$f(t_i, w_i) \approx y'(t_i) = f(t_i, y(t_i))$$

انظر الرسم البياني للدالة $y(t_i)$ الذي يبرز في شكل (2.5). وإحدى خطوات طريقة أويلر تظهر في شكل (أ) (3.5)، وتظهر سلسلة من الخطوات في شكل (ب) (3.5).

شكل 2.5



شكل 3.5













أ. $y(t) = \frac{1}{5}te^{3t} - \frac{1}{25}e^{3t} + \frac{1}{25}e^{-2t}$ ب. $y(t) = t + (1/1 - t)$

ج. $y(t) = t\ln t + 2t$ د. $y(t) = \frac{1}{2}\sin 2t - \frac{1}{3}\cos 3t + \frac{4}{3}$

4. الحلول الحقيقية لمسائل القيمة الابتدائية في التمرين (2) معطاة هنا. قارن الخطأ الحقيقي بحد الخطأ عند كل خطوة:

أ. $y(t) = \ln(e^t + e - 1)$ ب. $y(t) = \sqrt{t^2 + 2t + 6} - 1$

ج. $y(t) = \left(t - 2 + \sqrt{2}ee^{-\frac{t}{2}}\right)^2$ د. $y(t) = \dfrac{4 + \cos 2 - \cos 2t}{2t^2}$

5. استخدم طريقة أويلر لتقريب الحلول لكلٍّ من مسائل القيمة الابتدائية الآتية:

أ. $y' = y/t - (y/t)^2, \quad 1 \le t \le 2, \quad y(1) = 1$ عند $h = 0.1$

ب. $y' = 1 + y/t + (y/t)^2, \quad 1 \le t \le 3, \quad y(1) = 0$ عند $h = 0.2$

ج. $y' = -(y + 1)(y + 3), \quad 0 \le t \le 2, \quad y(0) = -2$ عند $h = 0.2$

د. $y' = -5y + 5t^2 + 2t, \quad 0 \le t \le 1, \quad y(0) = \frac{1}{3}$ عند $h = 0.1$

6. استخدم طريقة أويلر لتقريب الحلول لكلٍّ من مسائل القيمة الابتدائية الآتية:

أ. $y' = \dfrac{2 - 2ty}{t^2 + 1}, \quad 0 \le t \le 1, \quad y(0) = 1$ عند $h = 0.1$

ب. $y' = \dfrac{y^2}{1 + t}, \quad 1 \le t \le 2, \quad y(1) = \dfrac{-1}{\ln 2}$ عند $h = 0.1$

ج. $y' = t^{-1}(y^2 + y), \quad 1 \le t \le 3, \quad y(1) = -2$ عند $h = 0.2$

د. $y' = -ty + 4ty^{-1}, \quad 0 \le t \le 1, \quad y(0) = 1$ عند $h = 0.1$

7. الحلول الحقيقية لمسائل القيمة الابتدائية في التمرين (5) معطاة هنا. احسب الخطأ الحقيقي في تقريبات التمرين (5)

أ. $y(t) = \dfrac{t}{1 + \ln t}$ ب. $y(t) = t\tan(\ln t)$

ج. $y(t) = -3 + \dfrac{2}{1 + e^{-2t}}$ د. $y(t) = t^2 + \dfrac{1}{3}e^{-5t}$

8. الحلول الحقيقية لمسائل القيمة الابتدائية في التمرين (6) معطاة هنا. احسب الخطأ الحقيقي في تقريبات التمرين (5):

أ. $y(t) = \dfrac{2t + 1}{t^2 + 1}$ ب. $y(t) = \dfrac{-1}{\ln(t + 1)}$ ج. $y(t) = \dfrac{2t}{1 - 2t}$ د. $y(t) = \sqrt{4 - 3e^{-t^2}}$

9. افترض مسألة القيمة الابتدائية

$$y' = \frac{2}{t}y + t^2e^t, \quad 1 \le t \le 2, \quad y(1) = 0$$

مع حل صحيح $y(t) = t^2(e^t - e)$.

أ. استخدم طريقة أويلر مع $h = 0.1$ لتقريب الحل، وقارنه بالقيمة الحقيقية لـ y.

ب. استخدم الجواب الذي نتج في الفقرة (أ) والاستكمال الداخلي الخطي لتقريب قيم y الآتية، وقارنها بالقيم الحقيقية:

1. $y(1.04)$ 2. $y(1.55)$ 3. $y(1.97)$

ج. احسب قيمة h الضرورية لـ $|y(t_i) - w_i| \le 0.1$، مستخدمًا المعادلة (10.5).

10. افترض مسألة القيمة الابتدائية:

$$y' = \frac{1}{t^2} - \frac{y}{t} - y^2, \quad 1 \le t \le 2, \quad y(1) = -1$$

مع حل صحيح $y(t) = -1/t$:

أ. استخدم طريقة أويلر مع $h = 0.05$ لتقريب الحل، وقارنه بالقيمة الحقيقية لـ y.

ب. استخدم الجواب الذي نتج في الفقرة (أ) والاستكمال الداخلي الخطي لتقريب قيم y الآتية وقارنها بالقيم الحقيقية:

1. $y(1.052)$ 2. $y(1.555)$ 3. $y(1.978)$

ج. احسب قيمة h الضرورية لـ $|y(t_i) - w_i| \le 0.05$، مستخدمًا المعادلة (10.5).

11. افترض مسألة القيمة الابتدائية:

$$y' = -y + t + 1, \quad 0 \le t \le 5, \quad y(0) = 1$$

مع حل صحيح $y(t) = e^{-t} + t$:

أ. اكتب تقريبًا إلى $y(5)$ مستخدمًا طريقة أويلر مع $h = 0.2, h = 0.1$ و $h = 0.05$.

ب. حدِّد قيمة h المثلى لاستخدامها في حساب $y(5)$، مفترضًا $\delta = 10^{-6}$، وأن المعادلة (14.5) متحققة.

12. افترض مسألة القيمة الابتدائية

$$y' = -10y, \quad 0 \le t \le 2, \quad y(0) = 1$$

التي لها حل $y(t) = e^{-10t}$. ماذا يحدث عند تطبيق طريقة أويلر لهذه المسألة مع $h = 0.1$؟ هل هذا السلوك يخالف المبرهنة (9.5)؟

13. استخدم نتائج التمرين (5) والاستكمال الداخلي الخطي لتقريب قيم $y(t)$ الآتية، وقارن التقريبات الناتجة بالقيم الحقيقية الناتجة من استخدام الدّوال المعطاة في التمرين (7):

أ. $y(1.25)$ و $y(1.93)$ ب. $y(2.1)$ و $y(2.75)$

ج. $y(1.4)$ و $y(1.93)$ د. $y(0.54)$ و $y(0.94)$

14. استخدم نتائج التمرين (6) والاستكمال الداخلي الخطي لتقريب قيم $y(t)$ الآتية، وقارن التقريبات الناتجة بالقيم الحقيقية الناتجة من استخدام الدّوال المعطاة في التمرين (8):

أ. $y(0.25)$ و $y(0.93)$ ب. $y(1.25)$ و $y(1.93)$

ج. $y(2.10)$ و $y(2.75)$ د. $y(0.54)$ و $y(0.94)$

15. ليكن $E(h) = \frac{hM}{2} + \frac{\delta}{h}$:

أ. لمسألة القيمة الابتدائية

$$y' = -y + 1, \quad 0 \le t \le 1, \quad y(0) = 0$$

احسب قيمة h لتصغير $E(h)$. افترض $\delta = 5 \times 10^{-(n+1)}$ لو استخدمت حساب **n-digit** في الفقرة (ج).

ب. للقيمة المثلى لـ h والمحسوبة في (أ)، استخدم المعادلة (13.5) لحساب الخطأ الأدنى الذي يمكن إيجاده.

ج. قارن الخطأ الحقيقي الناتج باستخدام $h = 0.1$ و $h = 0.01$ بالخطأ الأدنى في الفقرة (ب). هل بإمكانك تفسير النتائج؟

16. في دائرة كهربائية معرضة لفولتية ξ لها مقاومة R، ومعامل حث L، وسعة كهربائية C في وضع التوازي، فإن التيار i يحقق المعادلة التفاضلية

$$\frac{di}{dt} = C\frac{d^2\xi}{dt^2} + \frac{1}{R}\frac{d\xi}{dt} + \frac{1}{L}\xi$$

افترض $C = 0.3$ farads, $R = 1.4$ ohms, $L = 1.7$ henries، وأن الفولتية معطاة من خلال

$$\xi(t) = e^{-0.06\pi t}\sin(2t - \pi)$$

فإذا كانت $i(0) = 0$ فأوجد التيار i للقيم $t = 0.1j$ حيث $j = 0, 1, \ldots, 100$.

17. يعتمد الكتاب [Ra, pp. 103–110] *Looking at History Through Mathematics*, Rashevsky يعتمد على نموذج لمسألة تتضمن حدوث التوحد في المجتمع. افترض مجتمعًا بتعداد سكاني $x(t)$ عند الزمن t (بالسنوات)، وأن للمتوحِّدين كلهم الذين يتزوجون من متوحدين آخرين إنشاءً متوحدين أيضًا، حيث أن نسبة ثابتة r من جميع الأإنشاء الآخرين جميعهم متوحدون أيضًا. فإذا افترضنا أن معدلي الولادات والوفيات للسكان جميعهم هما الثابتان b و d على التوالي، وإذا تزاوج المتوحدون مع غير المتوحِّدين عشوائيًّا، فإن المسألة يمكن التعبير عنها بالمعادلات التفاضلية:

$$\frac{dx(t)}{dt} = (b-d)x(t) \quad \text{و} \quad \frac{dx_n(t)}{dt} = (b-d)x_n(t) + rb(x(t) - x_n(t))$$

حيث يمثل $x_n(t)$ عدد المتوحدين في المجتمع عند الزمن t.

أ. افترض أن المتغير $p(t) = x_n(t)/x(t)$ يمثِّل نسبة المتوحدين في المجتمع عند الزمن t. أثبت أن هذه المعادلات يمكن دمجها وتبسيطها إلى معادلة تفاضلية واحدة

$$\frac{dp(t)}{dt} = rb(1 - p(t))$$

ب. بفرض $p(0) = 0.01, b = 0.02, d = 0.015$ و $r = 0.1$ اكتب تقريبًا للحل $p(t)$ من $t = 0$ إلى $t = 50$ عندما تكون سعة الخطوة $h = 1$ سنة.

ج. حل المعادلة التفاضلية لـ $p(t)$ بدقة، وقارن نتيجتك في الفقرة (ب) عندما $t = 50$ بالقيمة الصحيحة عند ذلك الزمن.

3.5 طرائق تايلور من الرتبة الكبيرة Higher-Order Taylor Methods

لما كان هدف الأساليب العددية هو إيجاد تقريبات دقيقة بأقل جهد، فإننا نحتاج إلى وسائل لمقارنة كفاءة طرائق التقريب المختلفة. تسمى الأداة الأولى موضع اهتمامنا خطأَ القطع المحلي local truncation error للطريقة. إن خطأ القطع المحلي عند خطوة معينة يقيس مقدار الحل الصحيح للمعادلة التفاضلية الذي يفشل في تحقيق معادلة الفرق المستخدمة في التقريب.

تعريف 11.5 طريقة الفرق $w_0 = \alpha$

$$w_{i+1} = w_i + h\,\phi(t_i, w_i) \quad \text{لكل} \quad i = 0, 1, \ldots, N-1$$

لها خطأ القطع المحلي

$$\tau_{i+1}(h) = \frac{y_{i+1} - (y_i + h\,\phi(t_i, y_i))}{h} = \frac{y_{i+1} - y_i}{h} - \phi(t_i, y_i)$$

لكلٍّ من $i = 0, 1, \ldots, N-1$. ■

وبالنسبة إلى طريقة أويلر، فإن خطأ القطع المحلي عند الخطوة i للمسألة

$$y' = f(t, y), \quad a \le t \le b, \quad y(a) = \alpha$$

هو
$$\tau_{i+1}(h) = \frac{y_{i+1} - y_i}{h} - f(t_i, y_i) \quad \text{لكل} \quad i = 0, 1, \ldots, N-1$$

حيث تمثّل عادة $y_i = y(t_i)$ القيمة الصحيحة للحل عند t_i. إن هذا الخطأ هو خطأ محلي؛ لأنه يقيس دقة الطريقة عند خطوة معينة، مفترضين أن الطريقة كانت صحيحة في الخطوة السابقة. وهكذا فإن ذلك يعتمد على المعادلة التفاضلية، وسعة الخطوة، والخطوة بعينها في التقريب.

وبالرجوع إلى المعادلة (7.5) في الفصل السابق، نرى أن طريقة أويلر لها

$$\tau_{i+1}(h) = \frac{h}{2} y''(\xi_i) \quad \text{لبعض} \quad \xi_i \quad \text{في} \quad (t_i, t_{i+1})$$

وعندما تكون $y''(t)$ معروفة لتُحدّد بالثابت M على $[a, b]$، فسيؤدي ذلك إلى

$$|\tau_{i+1}(h)| \le \frac{h}{2} M$$

ولهذا فإن خطأ القطع المحلي في طريقة أويلر يكون $O(h)$.

تكون إحدى السبل لاختيار طرائق المعادلة التفاضلية لحل المعادلات التفاضلية الاعتيادية بأسلوب له أخطاء تقلص محلي $O(h^p)$ لأكبر قيمة ممكنة لـ p، حيث نبقي عدد العمليات الحسابية للطرائق وتعقيداتها ضمن حدود معقولة.

الطرائق في هذا الفصل تستخدم كثيرة حدود تايلور Taylor. وإن المعلومات عن الاشتقاق عند نقطة هي لقريب قيمة الدالة عند نقطة جديدة.

ولما اشتقت طريقة أويلر باستخدام مبرهنة تايلور مع $n = 1$ لتقريب حل المعادلة التفاضلية فإن محاولتنا الأولى لإيجاد طرائق لتحسين سمات التقارب لطرائق الفرق تكمن في توسيع أسلوب الاشتقاق هذا لقيم أكبر لـ n.

افترض أن حل $y(t)$ مسألة القيمة الابتدائية

$$y' = f(t, y), \quad a \le t \le b, \quad y(a) = \alpha$$

له $(n + 1)$ من المشتقات المتصلة. فإذا وسّعنا الحل $y(t)$، بدلالة كثيرة حدود تايلور من الرتبة n حول t_i، وكان التقييم عند t_{i+1}، فإننا نحصل على

$$y(t_{i+1}) = y(t_i) + hy'(t_i) + \frac{h^2}{2} y''(t_i) + \cdots + \frac{h^n}{n!} y^{(n)}(t_i) + \frac{h^{n+1}}{(n+1)!} y^{(n+1)}(\xi_i) \qquad (15.5)$$

لـ ξ_i ضمن (t_i, t_{i+1}).

إن التفاضل المتتابع للحل $y(t)$ يعطي

$$y'(t) = f(t, y(t)), \quad y''(t) = f'(t, y(t)) \quad \text{وعمومًا} \quad y^{(k)}(t) = f^{(k-1)}(t, y(t))$$

وبتعويض هذه النتائج في المعادلة (15.5) نحصل على

$$y(t_{i+1}) = y(t_i) + hf(t_i, y(t_i)) + \frac{h^2}{2} f'(t_i, y(t_i)) + \cdots \qquad (16.5)$$
$$+ \frac{h^n}{n!} f^{(n-1)}(t_i, y(t_i)) + \frac{h^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n)}(\xi_i, y(\xi_i))$$

إننا نحصل على طريقة معادلة الفرق المناظرة للمعادلة (16.5) عن طريق حذف الجزء المتبقي











ب. إلى أقرب عشر من الثانية، حدِّد متى يصل المقذوف إلى أعلى ارتفاع ويبدأ السقوط.

12. استخدم طريقة تايلور من الرتبة 2 مع $h = 0.1$ لتقريب الحل إلى

$$y' = 1 + t\sin(ty), \quad 0 \le t \le 2, \quad y(0) = 0$$

4.5 طرائق رونج-كوتا Runge–Kutta Methods

إن طرائق تايلور المقدمة في الفصول السابقة لها سمة إيجابية تكمن في خطأ القطع المحلي، لكن الجانب السلبي فيها يتعلق بعملية الحساب والتقييم المطلوبة لاشتقاقات $f(t, y)$. وهذه عملية معقدة وتستغرق وقتًا طويلًا في غالبية المسائل، ولذلك فإن طرائق تايلور نادرًا ما تستخدم في التطبيق العملي. ولطرائق رونج-كوتا خطأ تقلص محلي من الرتبة العالية لطرائق تايلور، حيث تلغى الحاجة إلى حساب اشتقاقات $f(t, y)$ وتقييمها. وقبل عرض الأفكار المتعلقة باشتقاقها نحتاج إلى طرائق مبرهنة تايلور في متغيرين. وبرهان هذه التمهيدية يمكن إيجاده في أي كتاب متخصص في التفاضل والتكامل المتقدم. (انظر على سبيل مثال [Fu, p. 331]).

في أواخر ال 1800 استخدم كارل رونج (1856 – 1927) Carle Runge طرائق مماثلة لتلك التي في هذا البند لاشتقاق صيغ مختلفة لتقريب حل مسائل القيمة الأولية.

المبرهنة 13.5 افترض أن $f(t, y)$ وكل تفاضلاته الجزئية من الرتبة لا تزيد على $n+1$ متصلة على $D = \{(t, y) \mid a \le t \le b, c \le y \le d\}$، وليكن $(t_0, y_0) \in D$. ولكل $(t, y) \in D$، يوجد ξ ما بين t و t_0 وكذلك μ ما بين y و y_0 مع

$$f(t, y) = P_n(t, y) + R_n(t, y)$$

حيث

$$\begin{aligned}P_n(t, y) = {} & f(t_0, y_0) + \left[(t - t_0)\frac{\partial f}{\partial t}(t_0, y_0) + (y - y_0)\frac{\partial f}{\partial y}(t_0, y_0)\right] \\ & + \left[\frac{(t - t_0)^2}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}(t_0, y_0) + (t - t_0)(y - y_0)\frac{\partial^2 f}{\partial t \partial y}(t_0, y_0)\right. \\ & \left. + \frac{(y - y_0)^2}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(t_0, y_0)\right] + \cdots \\ & + \left[\frac{1}{n!}\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}(t - t_0)^{n-j}(y - y_0)^j\frac{\partial^n f}{\partial t^{n-j}\partial y^j}(t_0, y_0)\right]\end{aligned}$$

و

$$R_n(t, y) = \frac{1}{(n+1)!}\sum_{j=0}^{n+1}\binom{n+1}{j}(t - t_0)^{n+1-j}(y - y_0)^j\frac{\partial^{n+1} f}{\partial t^{n+1-j}\partial y^j}(\xi, \mu)$$

تسمى الدالة $P_n(t, y)$ كثيرة حدود تايلور بمتغيرين من الرتبة nth Taylor polynomial in two variables للدالة f حول (t_0, y_0)، و $R_n(t, y)$ عبارة عن الحد المتبقي المرتبط بـ $P_n(t, y)$. ■

في عام 1901، عمل مارتن ولهلم كوتا Martin Wilhelm Kutta (1867 – 1944) تعميمًا للطرائق التي طورَّها رونج عام 1895 لتكوين نظم المعادلات التفاضلية من الرتبة الأولى. هذه التقنيات مماثلة، ولكن ليست نفسها بالضبط، لتلك التي نعرفها حاليًا بطريقة رونج – كوتا Runge – Kutta.

مثال 1

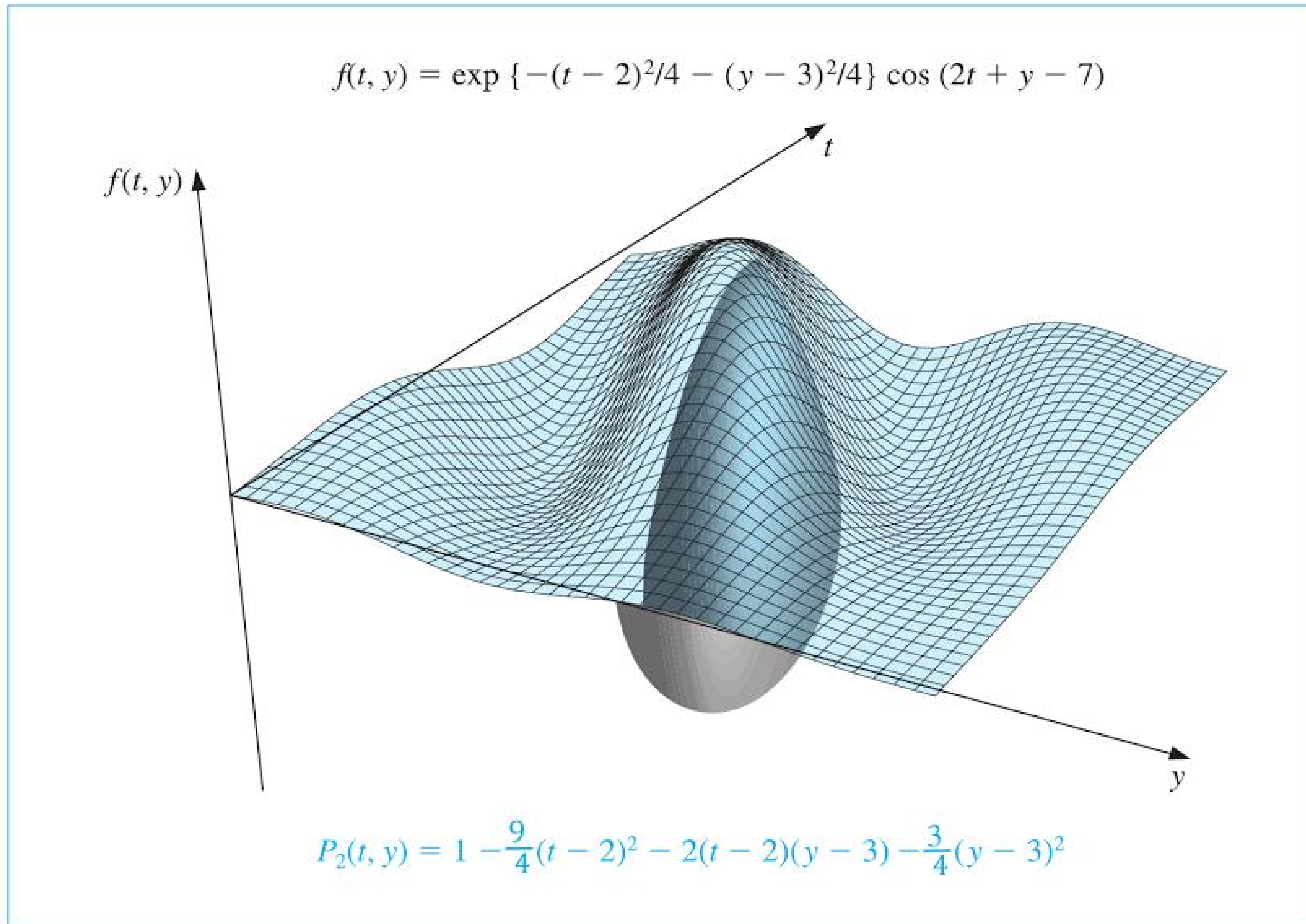
يبيّن شكل (4.5) الرسم البياني للدّالة

$$f(t, y) = \exp\left[-\frac{(t-2)^2}{4} - \frac{(y-3)^2}{4}\right]\cos(2t + y - 7)$$

معًا مع كثيرة حدود تايلور الثانية لـِ f حول (2,3)، أو كثيرة حدود بمتغيرين

$$P_2(t, y) = 1 - \tfrac{9}{4}(t-2)^2 - 2(t-2)(y-3) - \tfrac{3}{4}(y-3)^2$$

شكل 4.5



إن عمل التفاضل هذا الذي يتطلبه تحديد كثيرة حدود، سيكون متعِبًا باليد. ومن حسن الحظ، فإن إحدى عمليات Maple تتيح ذلك. ونحتاج أولًا إلى تأسيس لعملية كثيرة حدود تايلور متعددة المتغيرات، وذلك بإدخال الأمر

```
>readlib(mtaylor)
```

الذي ينتج الاستجابة

```
Proc().....end proc
```

ويكون إيجاد كثيرة حدود تايلور التي نحتاج إليها في هذا مثال من خلال إصدار الأمر

```
>mtaylor(exp(-(t-2)^2/4-(y-3)^2/4)*cos(2*t+y-7),[t=2,y=3],3)
```

تؤدي المتغيرة الأخيرة في هذا الأمر إلى حاجتنا إلى كثيرة حدود تايلور متعددة المتغيرات الثانية بمعنى كثيرة حدود تكعيبية. فإذا كانت هذه المتغيرة 2 فإننا نحصل على كثيرة حدود ثابتة.

وعند حذف هذه المعلمة، تكون 6 تلقائيًّا وتعطي كثيرة حدود تايلور الخامسة.

الاستجابة من أمر Maple هذا هو كثيرة حدود

$$1 - \frac{9}{4}(t-2)^2 - 2(t-2)(y-3) - \frac{3}{4}(y-3)^2$$

■

الخطوة الأولى في اشتقاق طريقة Runge-kutta هي تحديد قيم لـ a_1, α_1 و β_1 مع سمة كون $a_1 f(t+\alpha_1, y+\beta_1)$ تقرب

$$T^{(2)}(t, y) = f(t, y) + \frac{h}{2} f'(t, y)$$

بخطأ ليس أكثر من $O(h^2)$، وهو خطأ تقلص محلي لطريقة تايلور من الرتبة 2. وحيث إن

$$y'(t) = f(t, y) \text{ و } f'(t, y) = \frac{df}{dt}(t, y) = \frac{\partial f}{\partial t}(t, y) + \frac{\partial f}{\partial y}(t, y) \cdot y'(t)$$

فهذا يعطي

$$T^{(2)}(t, y) = f(t, y) + \frac{h}{2}\frac{\partial f}{\partial t}(t, y) + \frac{h}{2}\frac{\partial f}{\partial y}(t, y) \cdot f(t, y). \qquad (18.5)$$

وتوسيع $f(t+\alpha_1, y+\beta_1)$ في كثيرة حدود تايلور من الرتبة 1 حول (t, y) الخاص بها يعطي

$$a_1 f(t+\alpha_1, y+\beta_1) = a_1 f(t, y) + a_1\alpha_1 \frac{\partial f}{\partial t}(t, y) + a_1\beta_1 \frac{\partial f}{\partial y}(t, y) + a_1 \cdot R_1(t+\alpha_1, y+\beta_1), \qquad (19.5)$$

حيث إن

$$R_1(t+\alpha_1, y+\beta_1) = \frac{\alpha_1^2}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}(\xi, \mu) + \alpha_1\beta_1 \frac{\partial^2 f}{\partial t\, \partial y}(\xi, \mu) + \frac{\beta_1^2}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(\xi, \mu), \qquad (20.5)$$

لبعض قيم ξ ما بين t و $t+\alpha_1$ وكذلك μ ما بين y و $y+\beta_1$.

وبمطابقة معامل f واشتقاقاتها في المعادلتين (18.5 و 19.5) نحصل على المعادلات الثلاث

$$f(t, y): \quad a_1 = 1; \qquad \frac{\partial f}{\partial t}(t, y): \quad a_1\alpha_1 = \frac{h}{2}$$

و

$$\frac{\partial f}{\partial t}(t, y): \quad a_1\beta_1 = \frac{h}{2} f(t, y)$$

والوسيطات a_1, α_1 و β_1 تُحدّد وحدها لتكون

$$\beta_1 = \frac{h}{2} f(t, y) \text{ و } a_1 = 1, \quad \alpha_1 = \frac{h}{2}$$

ولذلك

$$T^{(2)}(t,y) = f\left(t+\frac{h}{2}, y+\frac{h}{2}f(t,y)\right) - R_1\left(t+\frac{h}{2}, y+\frac{h}{2}f(t,y)\right)$$

ومن المعادلة (20.5) نجد أن

$$R_1\left(t+\frac{h}{2}, y+\frac{h}{2}f(t,y)\right) = \frac{h^2}{8}\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}(\xi,\mu) + \frac{h^2}{4}f(t,y)\frac{\partial^2 f}{\partial t\,\partial y}(\xi,\mu) + \frac{h^2}{8}(f(t,y))^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(\xi,\mu)$$

وإذا كانت المشتقات الجزئية جميعها من الرتبة الثانية لـ f محددة فإن

$$R_1\left(t+\frac{h}{2}, y+\frac{h}{2}f(t,y)\right)$$

تكون $O(h^2)$، وهي رتبة خطأ القطع المحلي لطريقة تايلور من الرتبة 2. ووفقًا لذلك، فإن استخدام الأسلوب الجديد بدلًا من طريقة تايلور من الرتبة 2، قد يضيف خطأً دون أن يزيد في رتبة الخطأ.

وطريقة معادلة الفروق الناتجة من استبدال $T^{(2)}(t,y)$ في طريقة تايلور من الرتبة 2 بالمقدار $f(t+(h/2), y+(h/2)f(t,y))$ هي طريقة خاصة Runge-kutta تعرف بطريقة النقطة الوسطية Midpoint method.

طريقة النقطة الوسطية Midpoint method

$$w_0 = \alpha,$$

$$w_{i+1} = w_i + hf\left(t_i+\frac{h}{2}, w_i+\frac{h}{2}f(t_i,w_i)\right) \quad \text{لكل من} \quad i = 0, 1, \ldots, N-1$$

ولما كانت ثلاث معلمات فقط تظهر في $a_1 f(t+\alpha_1, y+\beta_1)$ ونحتاج إليها جميعًا في مطابقة $T^{(2)}$، فإننا نحتاج إلى صيغة أكثر تعقيدًا لتحقيق الشروط المطلوبة لأيٍّ من طرائق تايلور من الرتبة العالية.

إن صيغة الأربع معلمات الأكثر مناسبة لتقريب

$$T^{(3)}(t,y) = f(t,y) + \frac{h}{2}f'(t,y) + \frac{h^2}{6}f''(t,y)$$

هي

$$a_1 f(t,y) + a_2 f(t+\alpha_2, y+\delta_2 f(t,y)) \tag{21.5}$$

وحتى مع هذه، فإن هناك مرونة غير وافية لمطابقة الحد

$$\frac{h^2}{6}\left[\frac{\partial f}{\partial y}(t,y)\right]^2 f(t,y)$$

الناتج عن توسيع $(h^2/6)f''(t,y)$. وبناءً على ذلك فإن أحسن ما يمكن الحصول عليه من استخدام المعادلة (21.5) هو طرائق مع الخطأ المتقلص المحلي $O(h^2)$. وحقيقة كون المعادلة (21.5) لها أربع معلمات، فإن ذلك يعطي مرونة في اختيارها، ومن ثم فإن بالإمكان اشتقاق عدد $O(h^2)$













حيث يمثِّل k ثابت سرعة التفاعل. فإذا كان $k = 6.22 \times 10^{-19}, n_1 = n_2 = 2 \times 10^3$، $n_3 = 3 \times 10^3$، فما عدد الوحدات من هايدروكسايد البوتاسيوم التي تكوّنت بعد 0.2 s ؟

30. أثبت أن طريقة الفرق

$$w_0 = \alpha$$

$$w_{i+1} = w_i + a_1 f(t_i, w_i) + a_2 f(t_i + \alpha_2, w_1 + \delta_2 f(t_i, w_i))$$

لكلٍّ من $i = 0, 1, \ldots, N-1$، لا يمكن أن يكون لها خطأ متقلص محلي $O(h^3)$ لأي اختيار للثوابت a_1, a_2, α_2 وδ_2.

31. إن طريقة Runge–kutta من الرتبة 4 يمكن كتابتها بالصيغة

$$w_0 = \alpha,$$

$$w_{i+1} = w_i + \frac{h}{6} f(t_i, w_i) + \frac{h}{3} f(t_i + \alpha_1 h, w_i + \delta_1 h f(t_i, w_i))$$

$$+ \frac{h}{3} f(t_i + \alpha_2 h, w_i + \delta_2 h f(t_i + \gamma_2 h, w_i + \gamma_3 h f(t_i, w_i)))$$

$$+ \frac{h}{6} f(t_i + \alpha_3 h, w_i + \delta_3 h f(t_i + \gamma_4 h, w_i + \gamma_5 h f(t_i + \gamma_6 h, w_i + \gamma_7 h f(t_i, w_i)))).$$

أوجد قيم الثوابت $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \delta_1, \delta_2, \delta_3, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4, \gamma_5, \gamma_6,$ و γ_7 .

5.5 التحكم بالخطأ وطريقة رونج-كوتا-فهلبرك
Error control and the Runge-Kutta-Fehlberg Method

لاحظنا في الفصل (6.4) الاستخدام المناسب لخطوة بسعات مختلفة لإنتاج طرائق تقريب تكاملية وافية من الناحية الحسابية. وهذا ليس كافيًا لصالح هذه الطرائق في ضوء زيادة التعقيد عند تطبيق هذه الطرائق. وثمة مزية أخرى لدى هذه الطرائق تجعل منها ذات قيمة، حيث تتضمن العملية المتعلقة بسعة الخطوة تقديرًا لخطأ القطع الذي لا يتطلّب تقريب الاشتقاقات العالية للدالة. وهذه الطرائق تدعى المتبنية Adaptive؛ بسبب تبنيها لكل من عدد النقاط المستخدمة في التقريب وموقعها؛ لضمان إبقاء خطأ القطع ضمن حد معين.

هناك اتصال وثيق بين مسألة تقريب قيمة تكامل مؤكد ومسألة تقريب الحل لمسألة القيمة الوسطية. وعلينا إذن ألا نستغرب وجود طرائق متبنية لتقريب حلول مسائل القيمة الوسطية وكون هذه الطرائق ليست وافية فقط، بل تتضمن السيطرة على الخطأ أيضًا.

ربما ترغب في مراجعة مادة التربيع المعتمد في الفصل (6.4) قبل تناول مادة هذا الفصل والفصل (7.5).

يمكن وضع أي طريقة بخطوة واحدة لتقريب الحل $y(t)$ لمسألة القيمة الوسطية

$$y' = f(t, y) \text{ لكل } a \le t \le b \text{ عند } y(a) = \alpha$$

بالصيغة

$$w_{i+1} = w_i + h_i \phi(t_i, w_i, h_i) \quad \text{لكل} \quad i = 0, 1, \ldots, N-1$$

لدالة معين ϕ.

ثمة طريقة مثالية لمعادلة الفرق

$$w_{i+1} = w_i + h_i \phi(t_i, w_i, h_i), \quad i = 0, 1, \ldots, N-1$$

لتقريب الحل $y(t)$ لمسألة القيمة الوسطية

$$y' = f(t, y), \quad a \le t \le b, \quad y(a) = \alpha$$



5.5 ■ التحكم بالخطأ وطريقة رونج-كوتا-فهلبرك

وتمهيدية لذلك فإن

$$\tau_{i+1}(h) = \frac{1}{h}(y(t_{i+1}) - w_{i+1})$$
$$= \frac{1}{h}[(y(t_{i+1}) - \tilde{w}_{i+1}) + (\tilde{w}_{i+1} - w_{i+1})]$$
$$= \tilde{\tau}_{i+1}(h) + \frac{1}{h}(\tilde{w}_{i+1} - w_{i+1})$$

ولكن $\tau_{i+1}(h)$ هو $O(h^n)$، و $\tilde{\tau}_{i+1}(h)$ هو $O(h^{n+1})$، ولذا فإن الجزء المعنوي من $\tau_{i+1}(h)$ يجب أن يأتي من

$$\frac{1}{h}(\tilde{w}_{i+1} - w_{i+1})$$

هذا يعطينا تقريبًا سهل الحساب لخطأ القطع المحلي لطريقة $O(h^n)$:

$$\tau_{i+1}(h) \approx \frac{1}{h}(\tilde{w}_{i+1} - w_{i+1})$$

وليس الهدف تقدير خطأ القطع المحلي، بل تعديل سعة الخطوة وإبقاءها ضمن حد معين.

ولعمل ذلك؛ نفترض الآن أنه ما دام $\tau_{i+1}(h)$ هو $O(h^n)$، فإن العدد K موجود ومستقل عن h مع

$$\tau_{i+1}(h) \approx Kh^n$$

ولذلك فإن خطأ القطع المحلي الناتج عن تطبيق طريقة من الرتبة n مع سعة خطوة جديدة qh يمكن تقديرها باستخدام التقريبات الأصلية w_{i+1} و $\tilde{w}_{i+1}$

$$\tau_{i+1}(qh) \approx K(qh)^n = q^n(Kh^n) \approx q^n \tau_{i+1}(h) \approx \frac{q^n}{h}(\tilde{w}_{i+1} - w_{i+1})$$

ولتحديد $\tau_{i+1}(qh)$ بالمقدار ε؛ فإننا نختار q بحيث إن

$$\frac{q^n}{h}|\tilde{w}_{i+1} - w_{i+1}| \approx |\tau_{i+1}(qh)| \leq \varepsilon$$

ومن ثم

$$q \leq \left(\frac{\varepsilon h}{|\tilde{w}_{i+1} - w_{i+1}|}\right)^{1/n}$$

أحد الأساليب الشائعة التي تستخدم هذه المتباينة للسيطرة على الخطأ هي طريقة Runge-Kutta-Fehlberg (انظر [Fe]). ويستخدم هذا الأسلوب طريقة Runge-Kutta مع خطأ قطع محلي من الرتبة 5

$$\tilde{w}_{i+1} = w_i + \frac{16}{135}k_1 + \frac{6656}{12825}k_3 + \frac{28561}{56430}k_4 - \frac{9}{50}k_5 + \frac{2}{55}k_6$$

لتقدير الخطأ المحلي في طريقة Runge-Kutta من الرتبة 4 ومن خلال

$$w_{i+1} = w_i + \frac{25}{216}k_1 + \frac{1408}{2565}k_3 + \frac{2197}{4104}k_4 - \frac{1}{5}k_5$$

فإن معادلات المعامل هي

لقد طوَّر إرون فاهلبرغ Erwin Fehlberg هذه وغيرها من تقنيات تصحيح الخطأ، بينما كان يعمل مع وكالة الفضاء الأمريكية NASA في هنتسفيل/ألباما في ستينيات القرن الماضي 1960s. وفي عام 1960 نال ميدالية NASA للإنجاز العلمي المتميِّز مقابل عمله هذا.

$$k_1 = hf(t_i, w_i),$$
$$k_2 = hf\left(t_i + \frac{h}{4}, w_i + \frac{1}{4}k_1\right),$$
$$k_3 = hf\left(t_i + \frac{3h}{8}, w_i + \frac{3}{32}k_1 + \frac{9}{32}k_2\right),$$
$$k_4 = hf\left(t_i + \frac{12h}{13}, w_i + \frac{1932}{2197}k_1 - \frac{7200}{2197}k_2 + \frac{7296}{2197}k_3\right),$$
$$k_5 = hf\left(t_i + h, w_i + \frac{439}{216}k_1 - 8k_2 + \frac{3680}{513}k_3 - \frac{845}{4104}k_4\right),$$
$$k_6 = hf\left(t_i + \frac{h}{2}, w_i - \frac{8}{27}k_1 + 2k_2 - \frac{3544}{2565}k_3 + \frac{1859}{4104}k_4 - \frac{11}{40}k_5\right).$$

ومن إيجابيات هذه الطريقة أنها تتطلب ستة تقييمات فقط لـ f في كل خطوة. وطرائق Runge–Kutta من الرتبتين 4 و 5 التي تُستخدم معًا عشوائية، وتتطلب (انظر جدول 7.5 في الفصل 4.5) أربعة تقييمات على الأقل لـ f بالنسبة إلى الطريقة من الرتبة 4، بالإضافة إلى ستة أخرى للطريقة من الرتبة 5، وبمجموع لا يقل عن عشرة تقييمات دالة.

في مبرهنة السيطرة على الخطأ error-control theory ثمة قيمة ابتدائية لـ h عند الخطوة (i) استخدِمت لإيجاد القيم الابتدائي لـ w_{i+1} و $\tilde{w}_{i+1}$ التي تؤدي إلى تحديد q لتلك الخطوة، ومن ثم تُعاد الحسابات. وهذه العملية تتطلب ضعف عدد التقييمات الدالية لكل خطوة عند عدم السيطرة على الخطأ. وعمليًا تُختار قيمة q المستخدمة على نحو مختلف نوعًا ما لجعل تكلفة تقييم الدالة المتزايدة مجدية. وتستخدم قيمة q المحددة عند الخطوة (i) لغرضين هما:

- عندما $q < 1$، لرفض الاختيار الأول لـ h عند الخطوة (i)، وتكرار الحسابات مستخدمين qh.
- وعندما $q \geq 1$، لقبول القيمة المحسوبة عند الخطوة (i) مستخدمين سعة الخطوة h، ولتغيير سعة خطوة qh بالنسبة إلى الخطوة $(i + 1)$.

وبسبب مخالفة دلالة تقييم الدالة الواجب دفع ثمنها في حالة تكرار الخطوات، فإن q تُختار بتحفظ. وفي الحقيقة، مع طريقة Runge–Kutta–Fehlberg و $n = 4$ يكون الاختيار الاعتيادي

$$q = \left(\frac{\varepsilon h}{2|\tilde{w}_{i+1} - w_{i+1}|}\right)^{1/4} = 0.84\left(\frac{\varepsilon h}{|\tilde{w}_{i+1} - w_{i+1}|}\right)^{1/4}$$

في الخوارزمية (3.5) لطريقة Runge–Kutta–Fehlberg، أضيفت الخطوة 9 لاستبعاد تعديلات كبيرة في سعة الخطوة، بغرض تجنب هدر الكثير من الوقت مع سعات صغيرة للخطوة ضمن مناطق تتسم بمخالفات في اشتقاقات y، وكذلك تجنب سعات كبيرة للخطوة التي يمكنها أن تؤدي إلى تخطي مناطق حساسة ما بين الخطوات. وفي بعض الأحيان نجد أن عملية زيادة سعة الخطوة تحذف كليًّا من الخوارزمية، وأن عملية تقليل سعة الخطوة تعدّل لتصبح ضمن العملية فقط عند الحاجة إليها لجعل الخطأ تحت السيطرة.

































لبعض القيم $\hat{\mu}_i \in (t_{i-3}, t_{i+1})$. بافتراض أن التقريبات $w_0, w_1, \dots, w_i$ جميعها صحيحة يؤدي إلى خطأ قطع

$$\frac{y(t_{i+1}) - w_{i+1}^{(0)}}{h} = \frac{251}{720} y^{(5)}(\hat{\mu}_i) h^4 \tag{39.5}$$

وإن التحليل المماثل لطريقة Adams–Moulton بثلاث خطوات تأتي من

$$y(t_{i+1}) = y(t_i) + \frac{h}{24}[9f(t_{i+1}, y(t_{i+1})) + 19f(t_i, y(t_i)) - 5f(t_{i-1}, y(t_{i-1})) + f(t_{i-2}, y(t_{i-2}))] - \frac{19}{720} y^{(5)}(\tilde{\mu}_i) h^4$$

لبعض القيم $\tilde{\mu}_i \in (t_{i-2}, t_{i+1})$، يؤدي إلى خطأ قطع محلي

$$\frac{y(t_{i+1}) - w_{i+1}}{h} = -\frac{19}{720} y^{(5)}(\tilde{\mu}_i) h^4 \tag{40.5}$$

وللمضي في ذلك أكثر؛ يجب أن نفترض أن لقيم h الصغيرة يكون

$$y^{(5)}(\hat{\mu}_i) \approx y^{(5)}(\tilde{\mu}_i)$$

إن فاعلية أسلوب السيطرة على الخطأ تعتمد مباشرةً على هذا الافتراض.

وإذا طرحنا المعادلة (40.5) من المعادلة (39.5) يكون لدينا

$$\frac{w_{i+1} - w_{i+1}^{(0)}}{h} = \frac{h^4}{720}[251 y^{(5)}(\hat{\mu}_i) + 19 y^{(5)}(\tilde{\mu}_i)] \approx \frac{3}{8} h^4 y^{(5)}(\tilde{\mu}_i)$$

ولذلك

$$y^{(5)}(\tilde{\mu}_i) \approx \frac{8}{3h^5}(w_{i+1} - w_{i+1}^{(0)}) \tag{41.5}$$

واستخدام هذه التمهيدية لحذف الحد المتضمن $h^4 y^{(5)}(\tilde{\mu}_i)$ من المعادلة (40.5) يعطي التقريب لخطأ القطع المحلي لِـ

$$|\tau_{i+1}(h)| = \frac{|y(t_{i+1}) - w_{i+1}|}{h} \approx \frac{19h^4}{720} \cdot \frac{8}{3h^5} |w_{i+1} - w_{i+1}^{(0)}| = \frac{19|w_{i+1} - w_{i+1}^{(0)}|}{270h}$$

لنفترض أننا الآن نعود إلى المعادلة (40.5) مع سعة خطوة جديدة qh وتوليد تقريبات جديدة $\hat{w}_{i+1}^{(0)}$ و $\hat{w}_{i+1}$، والهدف اختيار q بما يحقق كون خطأ القطع المحلي المعطى بالمعادلة (40.5) محدداً بحد سماح ε المبين مسبقاً. فإذا افترضنا أن القيمة $y^{(5)}(\mu)$ في المعادلة (40.5) المرتبطة بِـ qh مقربة أيضاً باستخدام المعادلة (41.5) فإن

$$\frac{|y(t_i + qh) - \hat{w}_{i+1}|}{qh} = \frac{19q^4h^4}{720} |y^{(5)}(\mu)| \approx \frac{19q^4h^4}{720} \left[\frac{8}{3h^5} |w_{i+1} - w_{i+1}^{(0)}| \right]$$

ونحتاج إلى اختيار q ليكون

$$\frac{|y(t_i + qh) - \hat{w}_{i+1}|}{qh} \approx \frac{19q^4}{270} \frac{|w_{i+1} - w_{i+1}^{(0)}|}{h} < \varepsilon$$

بمعنى أننا نختار q ليكون

$$q < \left(\frac{270}{19}\frac{h\varepsilon}{|w_{i+1} - w_{i+1}^{(0)}|}\right)^{1/4} \approx 2\left(\frac{h\varepsilon}{|w_{i+1} - w_{i+1}^{(0)}|}\right)^{1/4}$$

عدداً من افتراضات التقريب قد افتُرضت في هذا التطوير، لذا تُختار q عمليًّا وبتحفظ، وعادة تكون

$$q = 1.5\left(\frac{h\varepsilon}{|w_{i+1} - w_{i+1}^{(0)}|}\right)^{1/4}$$

إن التغيير في سعة الخطوة للطريقة المتعددة الخطوات أكثر تكلفة من حيث تقييمات الدالة مقارنة بطريقة الخطوة الواحدة؛ إذ يجب حساب قيم البداية الجديدة المتساوية التباعد. وتمهيدية لذلك نتجاهل عادةً تغيير سعة الخطوة ما دام أن خطأ القطع المحلي ما بين $\varepsilon/10$ و ε، بمعنى أن

$$\frac{\varepsilon}{10} < |\tau_{i+1}(h)| = \frac{|y(t_{i+1}) - w_{i+1}|}{h} \approx \frac{19|w_{i+1} - w_{i+1}^{(0)}|}{270h} < \varepsilon$$

وبالإضافة إلى ذلك، فإن q تعطي حدًّا أعلى لضمان أن تقريبًا دقيقًا واحدًا على غير العادة لا يظهر خطوة ذات سعة كبيرة جدًّا. وتعتمد الخوارزمية (5.5) هذه الحماية مع حد أعلى 4.

وتذكر أنه لكون الطرائق المتعددة الخطوات تتطلب سعة خطوات متساوية لقيم البداية، فإن أي تغيير في سعة الخطوة يتطلب بالضرورة تكرار حساب قيم بداية جديدة عند تلك النقطة. وقد تم ذلك في الخوارزمية (5.5) من خلال استدعاء خوارزمية Runge–Kutta الجزئية (الخوارزمية 2.5).



متنبئ- مصحح آدم بسعة خطوة متغير
Adams Variable Step-Size Predictor-Corrector

لتقريب حل مسألة القيمة الابتدائية

$$y' = f(t, y), \quad a \le t \le b, \quad y(a) = \alpha$$

مع خطأ قطع محلي ضمن حد سماح معين:

المدخلات: نقاط النهاية a و b، شرط ابتدائي α، حد سماح TOL، أكبر سعة خطوة $hmax$، أصغر سعة خطوة $hmin$.

المخرجات: i, t_i, w_i, h حيث عند الخطوة i، فإن w_i تقرب $y(t_i)$، وقد استُخدِمت سعة الخطوة h أو ظهرت عبارة تفيد بأن أقل سعة للخطوة قد تم تجاوزها.

الخطوة	المضمون
1	هي خوارزمية جزئية من طريقة Runge–Kutta من الرتبة 4، وتسميتها $RK4(h, v_0, x_0, v_1, x_1, v_2, x_2, v_3, x_3)$، وتقبل سعة خطوة h بوصفها مدخلات وقيمة البداية $v_0 \approx y(x_0)$ وتعيد $\{(x_j, v_j) \mid j = 1, 2, 3\}$ معرفًا وفق ما يلي: عند $j = 1, 2, 3$، ضع $K_1 = hf(x_{j-1}, v_{j-1});$ $K_2 = hf(x_{j-1} + h/2, v_{j-1} + K_1/2)$ $K_3 = hf(x_{j-1} + h/2, v_{j-1} + K_2/2)$ $K_4 = hf(x_{j-1} + h, v_{j-1} + K_3)$

	$v_j = v_{j-1} + (K_1 + 2K_2 + 2K_3 + K_4)/6;$ $x_j = x_0 + jh.$
2	ضع $t_0 = a$ $w_0 = \alpha$ $h = hmax$ $FLAG = 1$ (سيستخدم لتنفيذ الحلقة في الخطوة 4). $LAST = 0$ (سيؤشر متى تحسَب القيمة الأخيرة). المخرجات (t_0, w_0)
3	استدع $RK4(h, w_0, t_0, w_1, t_1, w_2, t_2, w_3, t_3)$ ضع $NFLAG = 1$ (يشير إلى حساب من $RK4$). $i = 4$ $t = t_3 + h$
4	بما أن (FLAG = 1)، فطبّق الخطوات 5 – 20.
5	ضع $WP = w_{i-1} + \frac{h}{24}[55f(t_{i-1}, w_{i-1}) - 59f(t_{i-2}, w_{i-2})$ $+ 37f(t_{i-3}, w_{i-3}) - 9f(t_{i-4}, w_{i-4})];$ (التنبؤ w_i) $WC = w_{i-1} + \frac{h}{24}[9f(t, WP) + 19f(t_{i-1}, w_{i-1})$ $- 5f(t_{i-2}, w_{i-2}) + f(t_{i-3}, w_{i-3})];$ (صحح w_i) $\sigma = 19\|WC - WP\|/(270h).$
6	إذا كان $\sigma \leq TOL$ فطبّق الخطوات 7 – 16. (قُبلت التمهيدية). وإلا فطبق الخطوات 17 – 19. (رفضت التمهيدية).
7	ضع $w_i = WC$ (قبلت التمهيدية). $t_i = t$
8	إذا كان $NFLAG = 1$، فإنه عند $j = i-3, i-2, i-1, i$ تكون المخرجات (j, t_j, w_j, h). (النتائج السابقة مقبولة أيضًا). وما عدا ذلك تكون المخرجات (i, t_i, w_i, h). (قُبلت النتائج السابقة).
9	إذا كان $LAST = 1$ فضع $FLAG = 0$ (الخطوة التالية هي 20). وإلا فطبِّق الخطوات 10 – 16.
10	ضع $i = i + 1$ $NFLAG = 0$
11	إذا كان $\sigma \leq 0.1\ TOL$ أو $t_{i-1} + h > b$ فطبق الخطوات 12 – 16. (زد h إذا كانت أدق من المطلوب أو أنقص h لجعل b بمنزلة نقطة شبكية).
12	ضع $q = (TOL/(2\sigma))^{1/4}$











































ومن خلال فحص المتباينة (10.5) من الفصل (2.5) بصيغة حد الخطأ لطريقة Euler، يمكننا القول إنه في ظل فرضيات المبرهنة (9.5) يكون

$$\max_{1\le i\le N} |w_i - y(t_i)| \le \frac{Mh}{2L}|e^{L(b-a)} - 1|$$

وبذلك فإن طريقة Euler متقاربة بالنسبة إلى معادلة تفاضلية تحقق شروط هذا التعريف، ومعدل التقارب هو $O(h)$.

الطريقة المستقرة هي التي تعتمد نتائجها باستمرار على البيانات الابتدائية.

إن الطريقة المتسقة بخطوة واحدة تمتاز باقتراب معادلة الفرق لهذه الطريقة من المعادلة التفاضلية عندما تقترب سعة الخطوة إلى الصفر، لذا فإن خطأ القطع المحلي لطريقة متسقة يقترب إلى الصفر مع اقتراب سعة الخطوة من الصفر.

أما النوع الآخر من حد الخطأ لمسألة ما تظهر عند استخدام طرائق الفرق لتقريب حلول المعادلات التفاضلية فإنه ناتج عن عدم استخدام نتائج صحيحة. في التطبيق العملي، لا الشروط الابتدائية ولا العمليات الحسابية المتبعة بعد ذلك تكون ممثَّلة بدقة بسبب خطأ التدوير المرتبط بالعمليات الحسابية محدودة المواقع العشرية. ولقد رأينا في الفصل (2.5) أن هذا الافتراض يمكن أن يؤدي إلى مصاعب حتى مع طريقة Euler المتقاربة. ولتحليل هذه الحالة جزئيًّا؛ سنحاول تحديد أي الطرائق مستقرة؛ لكون تغييرات أو تشويشات صغيرة في الشروط الابتدائية تنتج في المقابل تغييرات صغيرة في التقريبات التي تلي ذلك.

ولأن الأساس في استقرارية معادلة الفرق بخطوة واحدة يكون إلى حد ما مماثلًا لشرط المعادلة التفاضلية الجيدة التقديم، فإنه ليس بمستغرب أن يظهر شرط Lipschitz هنا، كما حدث في المبرهنة المقابلة للمعادلات التفاضلية، المبرهنة (6.5).

إن الجزء (i) من المبرهنة التالية يأخذ في الحسبان استقرارية طريقة الخطوة الواحدة، وبرهان هذه التمهيدية ليس صعبًا وقد أُخذ في الحسبان في التمرين (1). والجزء (ii) من المبرهنة (20.5) يتضمن شروطًا وافية لطريقة متسقة لكي تكون متقاربة. ويبرر الجزء (iii) الملاحظة التي ظهرت في الفصل (5.5) حول السيطرة على الخطأ التام لطريقة ما من خلال السيطرة على خطأ القطع المحلي له، الذي يؤدي إلى أنه حينما يكون للخطأ بالقطع المحلي معدل تقارب $O(h^n)$ فسيكون للخطأ الكلي نفس معدل التقارب. وإن برهان الجزأين (ii) و (iii) أكثر صعوبة من الجزء (i)، ويمكن إيجاده ضمن موضوع عُرِض في [Gea1, pp. 57–58].

مبرهنة 20.5 لنفترض أن مسألة القيمة الابتدائية

$$y' = f(t, y), \quad a \le t \le b, \quad y(a) = \alpha$$

تم تقريبها بطريقة الفرق بخطوة واحدة بالصيغة

$$w_0 = \alpha, \quad w_{i+1} = w_i + h\phi(t_i, w_i, h)$$

لنفترض أيضًا وجود $h_0 > 0$، وأن $\phi(t, w, h)$ متصلة، وتحقق شرط Lipschitz في المتغير w مع ثابت L على المجموعة

$$D = \{(t, w, h) \mid a \le t \le b, -\infty < w < \infty, 0 \le h \le h_0\}$$

عندئذ

(i) الطريقة مستقرة.

(ii) طريقة الفرق متقاربة إذا وفقط إذا كانت متسقة، وتكافئ

$$a \le t \le b \text{ لكل } \phi(t, y, 0) = f(t, y)$$

(iii) إذا كانت الدالة τ موجودة، ولكلٍّ من N ,... ,$i = 1, 2$ يكون خطأ القطع المحلي $\tau_i(h)$ محققًا $|\tau_i(h)| \le \tau(h)$، حيث $0 \le h \le h_0$ فإن

$$|y(t_i) - w_i| \le \frac{\tau(h)}{L} e^{L(t_i - a)}$$ ■

مثال 1 افترض طريقة Modified Euler المعطاة من خلال

$$w_0 = \alpha, \quad w_{i+1} = w_i + \frac{h}{2}[f(t_i, w_i) + f(t_{i+1}, w_i + hf(t_i, w_i))]$$

عند $i = 0, 1, \ldots, N-1$. سنتحقق من أن هذه الطريقة تحقق فرضية hypothesis المبرهنة (5.20). ولهذه الطريقة

$$\phi(t, w, h) = \tfrac{1}{2} f(t, w) + \tfrac{1}{2} f(t + h, w + hf(t, w))$$

فإذا كانت f تحقق شرط Lipschitz على $\{(t, w) \mid a \le t \le b, -\infty < w < \infty\}$ في المتغير w مع ثابت L فإن

$$\begin{aligned}\phi(t, w, h) - \phi(t, \overline{w}, h) &= \tfrac{1}{2} f(t, w) + \tfrac{1}{2} f(t + h, w + hf(t, w)) \\ &\quad - \tfrac{1}{2} f(t, \overline{w}) - \tfrac{1}{2} f(t + h, \overline{w} + hf(t, \overline{w}))\end{aligned}$$

وإن شرط Lipschitz على f يؤدي إلى

$$\begin{aligned}|\phi(t, w, h) - \phi(t, \overline{w}, h)| &\le \tfrac{1}{2} L|w - \overline{w}| + \tfrac{1}{2} L\,|w + hf(t, w) - \overline{w} - hf(t, \overline{w})| \\ &\le L|w - \overline{w}| + \tfrac{1}{2} L\,|hf(t, w) - hf(t, \overline{w})| \\ &\le L|w - \overline{w}| + \tfrac{1}{2} hL^2|w - \overline{w}| \\ &= \left(L + \tfrac{1}{2} hL^2\right)|w - \overline{w}|.\end{aligned}$$

لذا فإن ϕ تحقق شرط Lipschitz في w على المجموعة

$$\{(t, w, h) \mid a \le t \le b, -\infty < w < \infty, 0 \le h \le h_0\}$$

ولأي $h_0 > 0$ مع ثابت

$$L' = L + \tfrac{1}{2} h_0 L^2$$

وأخيرًا إذا كانت f متصلة على $\{(t, w) \mid a \le t \le b, -\infty < w < \infty\}$، فإن ϕ متصلة على

$$\{(t, w, h) \mid a \le t \le b, -\infty < w < \infty, 0 \le h \le h_0\}$$

ومن ثم فالمبرهنة (20.5) تؤدي إلى أن طريقة Modified Euler متسقة. وبوضع $h = 0$، يكون لدينا

$$\phi(t, w, 0) = \tfrac{1}{2} f(t, w) + \tfrac{1}{2} f(t + 0, w + 0 \cdot f(t, w)) = f(t, w)$$

ولذا فإن شرط الاتساق المنوّه عنه في الجزء (ii) من المبرهنة (20.5) يتحقق، وبذلك فالطريقة متقاربة. والأكثر من ذلك لاحظنا أن خطأ القطع المحلي لهذه الطريقة يكون $O(h^2)$، ولذلك فإن $O(h^2)$ تقارب طريقة Modified Euler هو أيضًا $O(h^2)$. ■























































































































































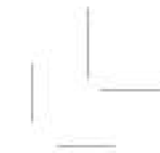












إن عملية الضرب المتضمنة في $A = LU$ تعطينا بالإضافة إلى المدخلات الصفرية المدخلات الآتية:

$$a_{11} = l_{11}$$

$$a_{i,i-1} = l_{i,i-1} \quad \text{لكل } i = 2, 3, \ldots, n \tag{12.6}$$

$$a_{ii} = l_{i,i-1}u_{i-1,i} + l_{ii} \quad \text{لكل } i = 2, 3, \ldots, n \tag{13.6}$$

و

$$a_{i,i+1} = l_{ii}u_{i,i+1} \quad \text{لكل } i = 1, 2, \ldots, n-1 \tag{14.6}$$

ويمكن إيجاد حل لهذا النظام باستخدام المعادلة (12.6) أولاً للحصول على الحدود غير الصفرية جميعها خارج القطر في L، ثم باستخدام المعادلتين (13.6) و (14.6) للحصول على المدخلات المتبقية في L و U على نحو متبادل.

ويمكن تخزين هذه المدخلات في مدخلات A المقابلة.

إن الخوارزمية (7.6) تحل نظام المعادلات $n \times n$ ذي مصفوفة معاملات مثلثية. إن هذه الخوارزمية تتطلب $(5n - 4)$ فقط من عمليات الضرب/ القسمة و $(3n - 3)$ من عمليات الجمع/ الطرح، ومن ثم فإن لها مزية حسابية في الطرائق الأخرى التي لا تستخدم الخاصية المثلثية للمصفوفة.



طريقة كراوت لتحليل الأنظمة الخطية ثلاثية الأقطار

Crout Factorization for Tridiagonal Linear Systems

لحلّ النظام الخطي $n \times n$

$$\begin{aligned}
E_1: &\quad a_{11}x_1 + a_{12}x_2 &&= a_{1,n+1}\\
E_2: &\quad a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 &&= a_{2,n+1}\\
\vdots &\quad \vdots &&\vdots\\
E_{n-1}: &\quad a_{n-1,n-2}x_{n-2} + a_{n-1,n-1}x_{n-1} + a_{n-1,n}x_n &&= a_{n-1,n+1}\\
E_n: &\quad a_{n,n-1}x_{n-1} + a_{nn}x_n &&= a_{n,n+1}
\end{aligned}$$

ومن المفترض أن له حلًّا وحيدًا.

المدخلات: البعد n، مدخلات A

المخرجات: الحل $x_1, \ldots, x_n$.

(الخطوات 1-3 وحل $Lz = b$.)

الخطوة	المضمون
1	ضع $l_{11} = a_{11}$ $u_{12} = a_{12}/l_{11}$ $z_1 = a_{1,n+1}/l_{11}$
2	لكل $i = 2, \ldots, n-1$ ضع $l_{i,i-1} = a_{i,i-1}$ (الصف i في L) $l_{ii} = a_{ii} - l_{i,i-1}u_{i-1,i}$ $u_{i,i+1} = a_{i,i+1}/l_{ii}$ (العمود i $(i+1)$ في U) $z_i = (a_{i,n+1} - l_{i,i-1}z_{i-1})/l_{ii}$
3	ضع $l_{n,n-1} = a_{n,n-1}$ (الصف n في L) $l_{nn} = a_{nn} - l_{n,n-1}u_{n-1,n}$ $z_n = (a_{n,n+1} - l_{n,n-1}z_{n-1})/l_{nn}$ (تنفذ الخطوتان 4 و 5 $Ux = z$.)



4	ضع $x_n = z_n$.
5	لكل $i = n-1, \ldots, 1$ ضع $x_i = z_i - u_{i,i+1}x_{i+1}$
6	المخرجات $(x_1, \ldots, x_n)$ توقف.

■

مثال 5 لتوضيح عملية المصفوفات الثلاثية الأقطار، لديك نظام ثلاثي الأقطار ذو المعادلات

$$\begin{aligned} 2x_1 - x_2 \qquad\qquad &= 1 \\ -x_1 + 2x_2 - x_3 \qquad &= 0 \\ -x_2 + 2x_3 - x_4 &= 0 \\ -x_3 + 2x_4 &= 1 \end{aligned}$$

الذي له المصفوفة المتدة (الموسعة)

$$\left[\begin{array}{cccc:c} 2 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & 1 \end{array}\right]$$

إن خوارزمية كراوت للتحليل تعطي التحليل الآتي:

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & \frac{3}{2} & 0 & 0 \\ 0 & -1 & \frac{4}{3} & 0 \\ 0 & 0 & -1 & \frac{5}{4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{2}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{3}{4} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = LU$$

إن حلَّ النظام $L\mathbf{z} = \mathbf{b}$ يعطي $\mathbf{z} = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, 1\right)^t$، وحلُّ النظام $U\mathbf{x} = \mathbf{z}$ هو $\mathbf{x} = (1, 1, 1, 1)^t$. ■

يمكن تطبيق خوارزمية كراوت للتحليل عندما $l_{ii} \neq 0$ لكل $i = 1, 2, \ldots, n$.

إن أيًّا من الحالتين الآتيتين تضمن صحة هذا، فإما أن تكون مصفوفة المعادلات للنظام موجبة التحديد، وإما أنها ذات قطر سائد حتمًا.

هناك حالة ثالثة تضمن إمكانية تطبيق هذه الخوارزمية وترد في المبرهنة الآتية، ويرد برهانها في التمرين (28).

مبرهنة 29.6 افترض أن $A = [a_{ij}]$ ثلاثية الأقطار وفيها $a_{i,i-1}a_{i,i+1} \neq 0$ لكل $i = 2, 3, \ldots, n-1$ إذا كان $|a_{11}| > |a_{12}|, |a_{ii}| \geq |a_{i,i-1}| + |a_{i,i+1}|$ لكل $i = 2, 3, \ldots, n-1$ و $|a_{nn}| > |a_{n,n-1}|$ فإن A تكون غير منفردة، وقيم l_{ii} المصفوفة في خوارزمية كراوت للتحليل غير صفرية لكل $i = 1, 2, \ldots, n$.

EXERCISE SET — مجموعة التمارين 6.6

1. حدِّد أيٌّ من المصفوفات الآتية تكون (i) متماثلة، (ii) منفردة، (iii) ذات قطر سائد حتمًا، (iv) موجبة التحديد:



8. استخدم الخوارزمية المطوّرة في التمرين (7) لحلِّ الأنظمة الخطية الآتية:

أ.
$$\begin{aligned} 4x_1 - x_2 + x_3 &= -1 \\ -x_1 + 3x_2 &= 4 \\ x_1 + 2x_3 &= 5 \end{aligned}$$

ب.
$$\begin{aligned} 4x_1 + 2x_2 + 2x_3 &= 0 \\ 2x_1 + 6x_2 + 2x_3 &= 1 \\ 2x_1 + 2x_2 + 5x_3 &= 0 \end{aligned}$$

ج.
$$\begin{aligned} 4x_1 + 2x_3 + x_4 &= -2 \\ 3x_2 - x_3 + x_4 &= 0 \\ 2x_1 - x_2 + 6x_3 + 3x_4 &= 7 \\ x_1 + x_2 + 3x_3 + 8x_4 &= -2 \end{aligned}$$

د.
$$\begin{aligned} 4x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &= 2 \\ x_1 + 3x_2 - x_4 &= 2 \\ x_1 + 2x_3 + x_4 &= 1 \\ x_1 - x_2 + x_3 + 4x_4 &= 1 \end{aligned}$$

9. طــوّر خوارزمية تشولســكي كما اقتُرح في الكتاب؛ لكــي تكون صالحة لحل أنظمة خطية، واستخدم الخوارزمية المطورة لحل الأنظمة الخطية الواردة في التمرين (7).

10. استخدم الخوارزمية المطوّرة الواردة في التمرين (9) لحل الأنظمة الخطية في التمرين (8).

11. استخدم تحليل كراوت للأنظمة الثلاثية الأقطار لحلِّ الأنظمة الخطية الآتية:

أ.
$$\begin{aligned} x_1 - x_2 &= 0 \\ -2x_1 + 4x_2 - 2x_3 &= -1 \\ -x_2 + 2x_3 &= 1.5 \end{aligned}$$

ب.
$$\begin{aligned} 3x_1 + x_2 &= -1 \\ 2x_1 + 4x_2 + x_3 &= 7 \\ 2x_2 + 5x_3 &= 9 \end{aligned}$$

ج.
$$\begin{aligned} 2x_1 - x_2 &= 3 \\ -x_1 + 2x_2 - x_3 &= -3 \\ -x_2 + 2x_3 &= 1 \end{aligned}$$

د.
$$\begin{aligned} 0.5x_1 + 0.25x_2 &= 0.35 \\ 0.35x_1 + 0.8x_2 + 0.4x_3 &= 0.77 \\ 0.25x_2 + x_3 + 0.5x_4 &= -0.5 \\ x_3 - 2x_4 &= -2.25 \end{aligned}$$

12. استخدم تحليل كراوت للأنظمة ثلاثية الأقطار لحلِّ الأنظمة الخطية الآتية:

أ.
$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 &= 3 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 &= -2 \\ 2x_2 + 3x_3 &= 0 \end{aligned}$$

ب.
$$\begin{aligned} 2x_1 - x_2 &= 5 \\ -x_1 + 3x_2 + x_3 &= 4 \\ x_2 + 4x_3 &= 0 \end{aligned}$$

ج.
$$\begin{aligned} 2x_1 - x_2 &= 3 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 &= 4 \\ x_2 - 2x_3 + x_4 &= 0 \\ x_3 + 2x_4 &= 6 \end{aligned}$$

د.
$$\begin{aligned} 2x_1 - x_2 &= 1 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 &= 2 \\ 2x_2 + 4x_3 - x_4 &= -1 \\ 2x_4 - x_5 &= -2 \\ x_4 + 2x_5 &= -1 \end{aligned}$$

13. لتكن A المصفوفة 10×10 ثلاثية الأقطار، حيث $a_{ii} = 2, a_{i,i+1} = a_{i,i-1} = -1$ لكل $i = 2, \ldots, 9$ و $a_{11} = a_{10,10} = 2, a_{12} = a_{10,9} = -1$. ليكن $\mathbf{b}$ المتجــه العمودي ذا 10 أبعاد المعطى بالعناصر $b_1 = b_{10} = 1$ ، و $b_i = 0$ لكل $i = 2, 3, \ldots, 9$،
حُلَّ $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ باستخدام تحليل كراوت للأنظمة ثلاثية الأقطار.

14. طوّر التحليل LDL^t للتمكن من تحليل المصفوفة المتماثلة A.
[ملحوظــة: ليــس مضمونًا أن يكــون التحليل ممكنًــا دائمًا]. طبّق الخوارزميــة الجديدة على المصفوفات الآتية:

أ.
$$A = \begin{bmatrix} 3 & -3 & 6 \\ -3 & 2 & -7 \\ 6 & -7 & 13 \end{bmatrix}$$

ب.
$$A = \begin{bmatrix} 3 & -6 & 9 \\ -6 & 14 & -20 \\ 9 & -20 & 29 \end{bmatrix}$$

ج.
$$A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & -3 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & 5 & 6 \\ 1 & -1 & 6 & 12 \end{bmatrix}$$

د.
$$A = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 4 & -4 \\ -2 & 3 & -4 & 5 \\ 4 & -4 & 10 & -10 \\ -4 & 5 & -10 & 14 \end{bmatrix}$$







































































































تُعرض القيم التقريبية المقابلة لنقاط البيانات التي نحصل عليها بطريقة المربعات الصغرى في جدول (2.8).

تعالَج المسألة العامة لتقريب مجموعة من البيانات $\{(x_i, y_i) \mid i = 1, 2, \ldots, m\}$ في كثيرة حدود جبرية

$$P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

من الرتبة $n < m - 1$ باستخدام طريقة المربعات الصغرى بطريقة مماثلة.

نختار $a_0, a_1, \ldots, a_n$ لجعل خطأ المربعات الصغرى الآتية أصغر ما يمكن:

$$\begin{aligned} E_2 &= \sum_{i=1}^{m}(y_i - P_n(x_i))^2 = \sum_{i=1}^{m} y_i^2 - 2\sum_{i=1}^{m} P_n(x_i)\, y_i + \sum_{i=1}^{m}(P_n(x_i))^2 \\ &= \sum_{i=1}^{m} y_i^2 - 2\sum_{i=1}^{m}\left(\sum_{j=0}^{n} a_j x_i^j\right) y_i + \sum_{i=1}^{m}\left(\sum_{j=0}^{n} a_j x_i^j\right)^2 \\ &= \sum_{i=1}^{m} y_i^2 - 2\sum_{j=0}^{n} a_j \left(\sum_{i=1}^{m} y_i x_i^j\right) + \sum_{j=0}^{n}\sum_{k=0}^{n} a_j a_k \left(\sum_{i=1}^{m} x_i^{j+k}\right) \end{aligned}$$

وكما هو الأمر في الحالة الخطية، لجعل E_2 أصغر ما يمكن يكون من الضروري وضع $\partial E_2/\partial a_j = 0$ لكل $j = 0, 1, \ldots, n$ وهكذا، لكل j يكون

$$0 = \frac{\partial E_2}{\partial a_j} = -2\sum_{i=1}^{m} y_i x_i^j + 2\sum_{k=0}^{n} a_k \sum_{i=1}^{m} x_i^{j+k}$$

إن هذا يعطي $n + 1$ من المعادلات القانونية بمجاهيل a_j عددها $n + 1$.

$$\sum_{k=0}^{n} a_k \sum_{i=1}^{m} x_i^{j+k} = \sum_{i=1}^{m} y_i x_i^j \quad \text{لكل} \quad j = 0, 1, \ldots, n \qquad (3.8)$$

ومن المفيد أن نكتب المعادلات كما يلي:

$$\begin{aligned} a_0 \sum_{i=1}^{m} x_i^0 + a_1 \sum_{i=1}^{m} x_i^1 + a_2 \sum_{i=1}^{m} x_i^2 + \cdots + a_n \sum_{i=1}^{m} x_i^n &= \sum_{i=1}^{m} y_i x_i^0 \\ a_0 \sum_{i=1}^{m} x_i^1 + a_1 \sum_{i=1}^{m} x_i^2 + a_2 \sum_{i=1}^{m} x_i^3 + \cdots + a_n \sum_{i=1}^{m} x_i^{n+1} &= \sum_{i=1}^{m} y_i x_i^1 \\ a_0 \sum_{i=1}^{m} x_i^n + a_1 \sum_{i=1}^{m} x_i^{n+1} + a_2 \sum_{i=1}^{m} x_i^{n+2} + \cdots + a_n \sum_{i=1}^{m} x_i^{2n} &= \sum_{i=1}^{m} y_i x_i^n \end{aligned}$$

يوجد لهذه المعادلات القانونية حلٌّ وحيد، إلا أن المجاهيل x_i متميزة ومختلفة بعضها عن بعض. (انظر تمرين 14).

جدول 3.8

i	x_i	y_i
1	0	1.0000
2	0.25	1.2840
3	0.50	1.6487
4	0.75	2.1170
5	1.00	2.7183

مثال 2 طبّق كثيرة الحدود المنفصلة من الرتبة الثانية على البيانات في جدول (3.8) باستخدام طريقة المربعات الصغرى.

من الواضح في هذه المسألة أن $n = 2, m = 5$. والمعادلات القانونية الثلاث هي

$$\begin{aligned} 5a_0 + 2.5a_1 + 1.875a_2 &= 8.7680 \\ 2.5a_0 + 1.875a_1 + 1.5625a_2 &= 5.4514 \\ 1.875a_0 + 1.5625a_1 + 1.3828a_2 &= 4.4015 \end{aligned}$$



















































You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



























































































































You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.











































































































































































































































































































